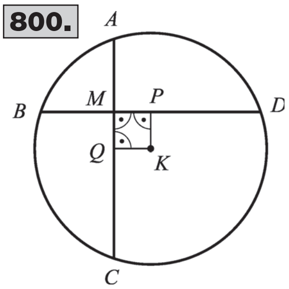
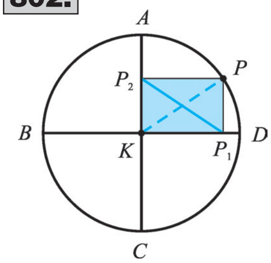
I

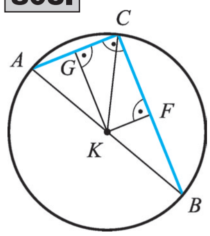
800.



802.



803.



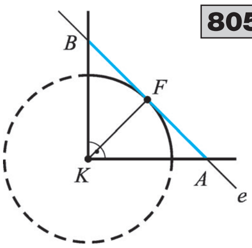
797. Az e-t E-ben érintő körök középpontjai az E-ben e-re állított merőlegesen vannak. A merőleges minden E-től különböző pontja megfelel, mert az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.

798. Az r sugarú körben AB átmérő, $BC = r$ húr. $OBC\triangle$ szabályos, tehát az $ABC\sphericalangle = 60°$.

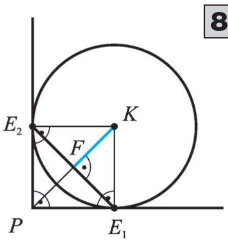
799. Az O középpontú, r sugarú körben $AB = AC = r$ húrok. $OAC\triangle$ szabályos $\Rightarrow OAB\sphericalangle =$ $= 60°$ és $OAB\triangle$ szabályos $\Rightarrow BAO\sphericalangle = 60°$, ezért $CAB\sphericalangle = CAO\sphericalangle + OAB\sphericalangle = 120°$.

800. Legyen P a BD húr, Q az AC húr felezéspontja! $KP \perp BD$ és $KQ \perp AC$ és $BD \perp AC \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\underline{MPKQ \text{ négyszög téglalap}}$. BD és AC egyenlő húrok, tehát egyenlő távol vannak a kör középpontjától: $\underline{KQ = KP}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $MPKQ$ négyzet. $\Rightarrow KP = MP = PB - BM = 6\text{ cm} - 4\text{ cm}$, azaz $\underline{\underline{KP = 2\text{ cm}}}$ és $\underline{\underline{KQ = 2\text{ cm}}}$.

805.



806.



801. A 800. ábra jelöléseit használjuk. A merőlegesség és $KQ =$ $= KP$ miatt $MPKQ$ négyzet. $\Rightarrow MP = 1{,}5$ cm, $BD = 7$ cm $\Rightarrow BP =$ $= 3{,}5$ cm, $BM = 3{,}5\text{ cm} - 1{,}5\text{ cm} = 2$ cm, $MD = 7\text{ cm} - 2\text{ cm} = 5$ cm, $MD = MC = 5$ cm, $MB = MA = 2$ cm.

802. Legyen a P pont BD átmérőre vetett merőleges vetülete P_1, AC átmérőre vetett merőleges vetülete P_2. A KP_1PP_2 négyszög téglalap, mert minden szöge 90°. A téglalap átlói egyenlő hosszúak, tehát $P_1P_2 = KP = 4$ cm.

803. A kör K középpontjából a húrra bocsátott merőleges felezi a húrt. $KF \perp CB$ és $KG \perp AC$ és $AC \perp CB \Rightarrow CFKG$ téglalap $\Rightarrow CF =$ $= GK = 6$ cm $\Rightarrow$ $CB = 12$ cm és $GC = KF = 4$ cm $\Rightarrow$ $AC = 8$ cm.

804. A K középpontú kör $e_1 \perp e_2$ érintőinek érintési pontja E_1 és E_2, valamint $e_1 \cap e_2 = P$. $E_1P = PE_2$ és a merőlegesség miatt KE_2PE_1 négyzet $\Rightarrow E_1P = PE_2 = 3$ cm.

805. $AKB\sphericalangle = 90°$, KF felezi az ívet, tehát felezi a $BKA\sphericalangle$-et is. $\Rightarrow$ $\Rightarrow BA = 2KF = 12$ cm.

806. PE_1KE_2 négyszög négyzet, átlói felezik egymást. $\Rightarrow$ $PK =$ $= E_1E_2 = 3$ cm. $KF = 1{,}5$ cm.

A kör mint ponthalmaz; körök szerkesztése

807. A P ponton átmenő r sugarú körök középpontjai r távolságra vannak P-től. $\Rightarrow$ Rajta vannak a P középpontú r sugarú k körön. A k kör minden pontja a ponthalmazhoz tartozik.

808. Legyen m_1 és m_2 a két merőleges, E és $F \in m_1$ a két pont. Felhasználjuk: A keresett kör átmegy E-n és F-en, ha középpontja rajta van az EF szakasz felezőmerőlegesén. $m_1 \perp m_2$ miatt $f_{EF} \parallel m_2$. Az f_{EF}-en lévő pontok köré rajzolt körök pontosan akkor érintik m_2-t, ha a kör sugara $r = \mathrm{d}(f_{EF}; m_2)$. A szerkesztés: ① EF szakaszfelező merőlegese: f_{EF}. ② $\mathrm{d}(f_{EF}; m_2) = r$ megszerkesztése. ③ E középpontú, r sugarú kör: k. ④ $k \cap f_{EF} = \{O_1; O_2\}$. ⑤ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. Nincs megoldás, ha m_2 elválasztja egymástól E-t és F-et, egyébként 1 vagy 2 kör szerkeszthető.

809. A K középpontú beírt kör G-ben érinti az AC oldalt $\Rightarrow KG \perp AC \Rightarrow KG \perp AG \Rightarrow$ e(K; G) érinti az A középpontú, AG sugarú k_A kört. Hasonlóan megmutatható, hogy e(K; G) érinti a C középpontú, CG sugarú k_C kört. $\Rightarrow k_A$ és k_C köröknek G-ben közös érintője van. $\Rightarrow k_A$ G-ben érinti k_C-t. Az E-beli és F-beli érintkezés hasonlóan látható be. Megjegyzés: Tudjuk, hogy a beírt kör G érintési pontja az AC oldalt $AG = s - a$ és $GC = s - c$ szakaszokra bontja. $AG + GC =$ $= s - a + s - c = b$, tehát a két kör sugarának összege egyenlő középpontjaik távolságával, azaz a két kör kívülről érinti egymást.

810. A szerkesztés: ① A háromszög körülírt körének megszerkesztése. $\to K$; R. ② K középpontú, $(R + e)$ sugarú kör: k_1. ③ K középpontú, $(R - e)$ sugarú kör: k_2. Egy megoldás van, ha $e \geq R$, két megoldás van, ha $e < R$.

811. **1. eset:** $AB = AC$, a háromszög egyenlő szárú. Bármely A középpontú kör teljesíti a feltételt, hogy B-től és C-től egyenlő távolságra halad.

2. eset: $AB > AC$. A szerkesztés: ① A középpontú, b sugarú kör: k_2. ② A középpontú, c sugarú kör: k_1. ③ A középpontú, $\dfrac{c+b}{2}$ sugarú kör: k_1 és k_2 úgynevezett középköre, k. k távolsága B-től: $c - \dfrac{c+b}{2} = \dfrac{c-b}{2}$ és k távolsága C-től: $\dfrac{c+b}{2} - b = \dfrac{c-b}{2}$, tehát a távolságok egyenlők.

812. Válasszunk ki a négy pont közül hármat: A-t, B-t és C-t! A szerkesztés: ① $ABC\triangle$ körülírt köre $k_1 \to K$; R_1. ② K középpontú, $KD = R_2$ sugarú kör: k_2. ③ K középpontú, $\dfrac{R_1+R_2}{2}$ sugarú kör: k, a keresett kör. k kör megfelelő, hiszen pl. d(B; k) $= R_1 - \dfrac{R_1+R_2}{2} = \dfrac{R_1-R_2}{2}$ és d(D; k) $=$ $= \dfrac{R_1+R_2}{2} - R_2 = \dfrac{R_1-R_2}{2}$. Végtelen sok megoldás van, ha a négy pont egy körön van (ezzel a körrel koncentrikus körök). Négy megoldás van, ha a négy pont nincs egy körön. A négy megoldás úgy adódik, hogy négyféleképpen választhatunk ki a pontok közül hármat, amik köré a k_1 kört szerkesztjük.

813. Adott: A; B; r. A szerkesztés: ① A középpontú, r sugarú kör: k_1. ② B középpontú, r sugarú kör: k_2. ③ $k_1 \cap k_2 = \{K_1; K_2\}$. ④ K_1 középpontú, r sugarú kör: k_{I}. K_2 középpontú, r sugarú kör: k_{II}. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

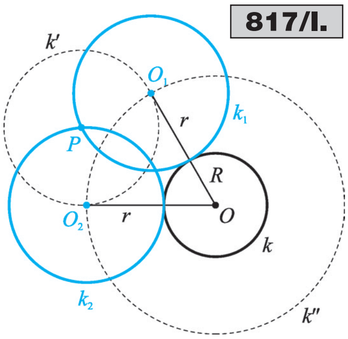
814. Legyen e az adott egyenes, E az érintési pont, P a kitűzött pont. A szerkesztés: ① E-ben merőlegest állítunk e-re: m. ② PE szakaszfelező merőlegese: f_{PE}. ③ $f_{PE} \cap m = K$. ④ K középpontú, KP sugarú kör: k. 0 vagy 1 megoldás lehet.

815. A szerkesztés lépéseit az a és b szögszárak által meghatározott konvex szögtartományban végezzük. A szerkesztés: ① r távolságra párhuzamos a-val: e_2. ② r távolságra párhuzamos b-vel: e_1. ③ $e_1 \cap e_2 = K$. ④ K középpontú, r sugarú kör: k. Konvex szög esetén a kör a szögtartományban, konkáv szög esetén a szögtartományon kívül van.

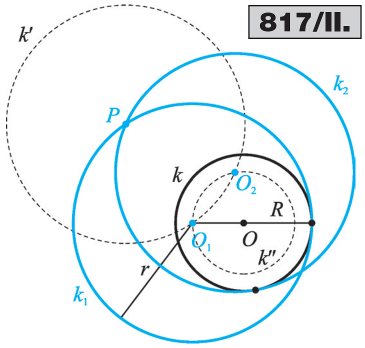
816. A szerkesztés: ① γ szögfelezője: f_γ. ② $f_\gamma \cap AB = P$. ③ P-ből merőleges CB-re $\to PE_1 = r$. ④ P középpontú, r sugarú félkör: k. Egyértelműen megoldható.

I

817/I.



817/II.



817. **1. eset:** Az adott kör a keresett kört kívülről érinti. Felhasználjuk: $O_1O = O_2O = r + R$ és $O_1P = O_2P = r$. A szerkesztés: ① P középpontú, r sugarú kör: k'. ② O középpontú, $(R + r)$ sugarú kör: k''. ③ $k' \cap k'' = \{O_1; O_2\}$. ④ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

2. eset: Az adott kör a keresett kört belülről érinti. Felhasználjuk: $O_1O = O_2O = r - R$ és $O_1P = O_2P = r$. A szerkesztés: ① P középpontú, r sugarú kör: k'. ② O középpontú, $(r - R)$ sugarú kör: k''. ③ $k' \cap k'' = \{O_1; O_2\}$ ④ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

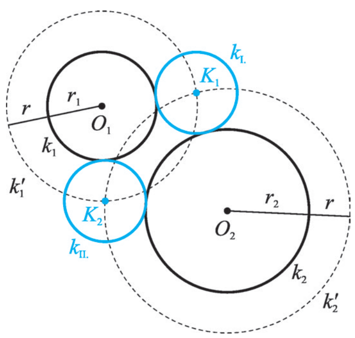
818. Felhasználjuk: $O_1K_1 = O_1K_2 = r_1 + r$ és $O_2K_1 = O_2K_2 = r_2 + r$. A szerkesztés: ① O_1 középpontú, $(r_1 + r)$ sugarú kör: k_1'. ② O_2 középpontú, $(r_2 + r)$ sugarú kör: k_2'. ③ $k_1' \cap k_2' = \{K_1; K_2\}$. ④ K_1 középpontú, r sugarú kör: k_{I}. K_2 középpontú, r sugarú kör: k_{II}. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

819. Felhasználjuk: $O_1K_1 = O_1K_2 = R_1 - r$ és $O_2K_1 = O_2K_2 = R_2 + r$. A szerkesztés: ① O_1 középpontú, $(R_1 - r)$ sugarú kör: k_1'. O_2 középpontú, $(R_2 + r)$ sugarú kör: k_2'. ② $k_1' \cap k_2' = \{K_1; K_2\}$. ③ K_1 középpontú, r sugarú kör: k_{I}. K_2 középpontú, r sugarú kör: k_{II}. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

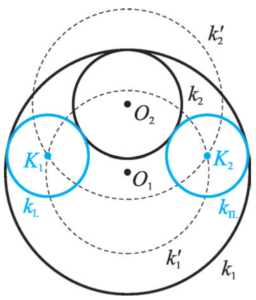
820. Felhasználjuk: $O_1K_1 = O_1K_2 = 4{,}5$ cm és $O_2K_1 = O_2K_2 = 5{,}5$ cm. A szerkesztés: ① O_1 középpontú, $r_1 + r = 4{,}5$ cm sugarú kör: k_1'. ② O_2 középpontú, $r_2 + r = 5{,}5$ cm sugarú kör: k_2'. ③ $k_1' \cap k_2' = \{K_1; K_2\}$. ④ K_1 középpontú, 3,5 cm sugarú kör: k_{I}. K_2 középpontú, 3,5 cm sugarú kör: k_{II}.

821. Legyen az adott pont P, az adott egyenes e! Felhasználjuk: $d(O_1; e) = d(O_2; e) = r$ és $O_1P = O_2P = r$. A szerkesztés: ① P középpontú, r sugarú kör: k. ② r távolságra párhuzamos e-vel: f. ③ $k \cap f = \{O_1; O_2\}$. ④ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

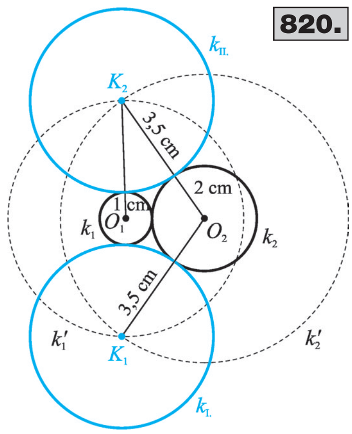
818.



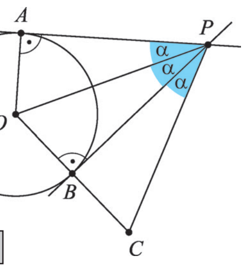
819.



820.



822. Legyen az adott egyenes e, és annak adott pontja E! A szerkesztés: ① E középpontú, r sugarú kör: k. ② E-ben merőleges e-re: m. ③ $k \cap m = \{O_1; O_2\}$. ④ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. Mindig két megoldás van.
823. Legyen az adott egyenes e, az adott k kör középpontja O, sugara R. A szerkesztés: ① e-től r távolságra párhuzamos egyenespár: f_1; f_2. ② O középpontú, $(R-r)$ sugarú kör: k'. O középpontú, $(R+r)$ sugarú kör: k''. ③ $k' \cap f_1 = \{O_3; O_4\}$ és $k' \cap f_2 = \{O_1; O_2\}$ és $k'' \cap f_1 = \{O_7; O_8\}$ és $k'' \cap f_2 = \{O_5; O_6\}$. ④ O_i középpontú, r sugarú kör: k_i $(1 \le i \le 8)$. 0-tól 8-ig változhat a megoldások száma.
824. Felhasználjuk: $O_iO = 2r$ és $d(O_i; e) = r$. A szerkesztés: ① O középpontú, $2r$ sugarú kör: k'. ② e-től r távolságra párhuzamos egyenespár: f_1; f_2. ③ $k' \cap f_1 = \{O_3; O_4\}$ és $k' \cap f_2 = \{O_1; O_2\}$. ④ O_i középpontú, r sugarú kör: k_i $(1 \le i \le 4)$. 4 megoldás van.
825. Legyen az adott kör középpontja O, átmérője AB. Felhasználjuk: $O_iO = 2$ cm és $d(O_i; AB) = 1$ cm. A szerkesztés: ① AB átmérőtől 1 cm-re levő párhuzamos egyenespár: e_1; e_2. ② O középpontú, 2 cm sugarú kör: k'. ③ $k' \cap e_1 = \{O_1; O_2\}$ és $k' \cap e_2 = \{O_3; O_4\}$. ④ O_i középpontú, 1 cm sugarú kör: k_i $(1 \le i \le 4)$. 4 megoldás van.
826. Legyen az adott kör középpontja O, sugara r, érintője e, azon az érintési pont E! Felhasználjuk: $d(O_i; e) = 2r$ és $OO_i = 3r$. **1. eset:** k kívülről érinti a szerkesztett kört. A szerkesztés: ① O középpontú, $3r$ sugarú kör: k'. ② e-től $2r$ távolságra párhuzamos egyenes a körrel azonos félsíkban: f_1. ③ $k' \cap f_1 = \{O_1; O_2\}$. ④ $k' \cap OE = O_3$. ⑤ O_i középpontú, $2r$ sugarú kör: k_i $(1 \le i \le 3)$. **2. eset:** k belülről érinti a szerkesztett kört. A szerkesztés: ① O középpontú, $2r - r$ sugarú kör: $k'' \equiv k$. ② $k \cap OE = O_4$. ③ O_4 középpontú, $2r$ sugarú kör: k_4. 4 megoldás van, ha $\alpha \ne 180°$.
827. Legyenek az adott szög szárai a és b. A szerkesztés lépéseit a szögszárak által meghatározott konvex szögtartományban végezzük. A szerkesztés: ① d távolságra párhuzamos a-val: e. ② $e \cap b = K$. ③ K középpontú, d sugarú kör: k. ④ A k kör szögfelezőre vonatkozó tükörképe b-t érinti, középpontja a-n van, tehát szintén megfelel. 2 megoldás van.
828. Legyenek a téglalap csúcsai A, B, C és D. A szerkesztés: ① BD átló felezőmerőlegese: f_{BD}. ② $f_{BD} \cap e(B; C) = O_1 \rightarrow O_1$ középpontú, O_1D sugarú kör: k_1. $f_{BD} \cap e(D; C) = O_2 \rightarrow O_2$ középpontú, O_2D sugarú kör: k_2. $f_{BD} \cap e(A; B) = O_3 \rightarrow O_3$ középpontú, O_3D sugarú kör: k_3. $f_{BD} \cap e(A; D) = O_4 \rightarrow O_4$ középpontú, O_4D sugarú kör: k_4. ③ AB felezőmerőlegesére tükrözve újabb 4 megoldást kapunk. Ha $ABCD$ négyzet, akkor $O_1 \equiv O_2 \equiv C$, $O_3 \equiv O_4 \equiv D \Rightarrow$ 4 megoldás van.
829. Az $ABO\triangle$ egyenlő szárú és $OAB\sphericalangle = 60° \Rightarrow ABO\triangle$ egyenlő oldalú is $\Rightarrow$ A keresett kör sugara AB-vel egyenlő. A szerkesztés: ① A középpontú, AB sugarú kör és B középpontú, AB sugarú kör metszéspontja: O_1 és O_2. ② O_1 középpontú, AO_1 sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, AO_2 sugarú kör: k_2.
830. A szerkesztés: ① Szerkesszük meg az $ABC\triangle$ beírt körét: k_o (középpontja O_o, sugara r_o). ② O_o középpontú ($r_o - 1$ cm) sugarú kör: k. Ha $r_o \le 1$ cm, akkor nem létezik k, egyébként egyértelmű a megoldás.
831. A szerkesztést a szögszárak által meghatározott konvex szögtartományban végezzük. Felhasználjuk: A kör E-ben érinti a-t, ha a középpontja rajta van az E-ben a-ra állított m merőlegesen. A kör érinti a szögszárakat, ha középpontja rajta van az f_α szögfelezőn. A szerkesztés: ① $f_\alpha \cap m = K$. ② K középpontú, KE sugarú kör: k. Egyértelmű a megoldás, ha $\alpha \ne 180°$.
832. Felhasználjuk: A kör E-ben érinti e-t, ha a középpontja rajta van az E-ben e-re állított m merőlegesen. A kör érinti az e és f párhuzamosokat, ha a középpontja rajta van e és f középpárhuzamosán, g-n. A szerkesztés: ① $g \cap m = K$. ② K középpontú, KE sugarú kör: k. Egyértelmű a megoldás.
833. Legyen a két párhuzamos e és f, az adott kör középpontja K. A szerkesztés: ① e és f középpárhuzamosa: g. ② $d(e; g) = r$. ③ K középpontú, $(R+r)$ sugarú kör: k'. K középpontú, $(R-r)$ sugarú kör: k''. ④ $k' \cap g = \{O_1; O_2\}$ és $k'' \cap g = \{O_3; O_4\}$. ⑤ O_i középpontú, r sugarú kör: k_i $(1 \le i \le 4)$. 0; 1; 2; 3 vagy 4 megoldás lehet.
834. A szerkesztés: ① e és f középpárhuzamosa: g. ② $d(e; g) = r$. ③ P középpontú, r sugarú kör: k. ④ $k \cap g = \{O_1; O_2\}$. ③ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.



835.

835. $OAPB$ négyszög deltoid, OP szimmetriaátlója felezi az $APB\sphericalangle$-et: $APO\sphericalangle = OPB\sphericalangle = \alpha$. BP merőlegesen felezi az OC szakaszt, ezért felezi az $OPC\sphericalangle$-et: $\alpha = OPB\sphericalangle = BPC\sphericalangle$. $\Rightarrow APC\sphericalangle = APO\sphericalangle + OPB\sphericalangle + BPC\sphericalangle = 3\alpha = \underline{\underline{3BPC\sphericalangle}}$.

836. Legyen az adott szög csúcsa A, a szögfelező belső pontja P. Felhasználjuk: $P \in f_\alpha$ miatt AP-re a P-ben állított merőleges érinti a szerkesztendő köröket. A szerkesztés: ① P-ben merőleges f_α-ra. A merőlegesnek a szögszárakkal való metszéspontjai B és C. ② k_o kör szerkesztése az $ABC\triangle$-be f_β segítségével. ③ A BC oldalt kívülről érintő k_a kör szerkesztése f_β segítségével. 2 megoldás van.

837. A szerkesztés: ① A keresett kör átmegy A-n és B-n $\Rightarrow$ középpontja rajta van AB felezőmerőlegesén $\rightarrow f_{AB}$. ② A keresett középponttól A R távolságban van, így K rajta van az A középpontú, R sugarú körön $\rightarrow k_A$. ③ $k_A \cap f_{AB} = \{K_1; K_2\} \rightarrow k_1; k_2$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

838. Legyen a megadott kör középpontja O, sugara r, tetszőleges átmérőjének két végpontja A és B. Ha $R > r$, akkor a feltételeknek eleget tevő körök K középpontjaira $AOK\sphericalangle = 90°$. Pitagorasz-tétel szerint: $KO = \sqrt{R^2 - r^2}$, tehát a K pontok O középpontú, $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú k' körön vannak. A k' kör bármely K pontjához egyértelműen megadható a KO-ra merőleges átmérő, tehát a keresett ponthalmaz az O középpontú, $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú kör. Ha $R = r$, akkor egyetlen középpont van: O pont. Ha $R < r$, akkor nincs megoldás.

Érintkező körök

839. Ha a k' kör érinti k_1-et az E_1, k_2-t az E_2 pontban, akkor E_2; O'; E_1 és O egy egyenesen vannak. $E_2O' + O'E_1 + E_1O = E_2O$, azaz $E_2O' + O'E_1 + r_1 = r_2 \Rightarrow E_2O' = O'E_1 = \dfrac{r_2 - r_1}{2} \Rightarrow O'$ rajta van a középkörön. A középkör bármely pontja megfelelő.

840. Legyen a koncentrikus körök középpontja O, a keresett kör középpontja K, sugara r, a külső körrel való érintési pontja E_1, a belsővel E_2. Érintkező körök érintési pontja rajta van a körök centrálisán. $2r = E_1E_2 = r_2 + r_1 \Rightarrow r = \dfrac{r_2 + r_1}{2}$. $OK = r_2 - r = r_2 - \dfrac{r_2 + r_1}{2} = \dfrac{r_2 - r_1}{2}$. A keresett körök középpontjai az eredeti körökkel koncentrikus, $\dfrac{r_2 - r_1}{2}$ sugarú k' körön helyezkednek el. Az érintő körök sugara $r = \dfrac{r_2 + r_1}{2}$. A k' kör minden pontja egy-egy érintő kör középpontja.

841. 1. eset: A belső kör kívülről érinti a keresett kört. Felhasználjuk: A 839. feladatból tudjuk, hogy a k_1-et kívülről és k_2-t belülről érintő körök középpontjai az O középpontú, $\dfrac{r_2 + r_1}{2}$ sugarú körön vannak, sugaruk $\dfrac{r_2 - r_1}{2}$. A szerkesztés: ① O középpontú, $\dfrac{r_2 + r_1}{2}$ sugarú kör: k'. ② P középpontú, $r = \dfrac{r_2 - r_1}{2}$ sugarú kör: k''. ③ $k' \cap k'' = \{O_1; O_2\}$. ④ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_{I}. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_{II}. 0; 1 vagy 2 megoldás van.

2. eset: A belső kör belülről érinti a keresett kört. Felhasználjuk: A 840. feladatból tudjuk, hogy azoknak a köröknek a középpontjai, amelyek a k_2-t belülről érintik és amelyeket a k_1 belülről érint, az O középpontú, $\frac{r_2-r_1}{2}$ sugarú körön vannak, sugaruk $\frac{r_2+r_1}{2}$. A szerkesztés: ① O középpontú, $\frac{r_2-r_1}{2}$ sugarú kör: k', ② P középpontú, $r=\frac{r_2+r_1}{2}$ sugarú kör: k''. ③ $k' \cap k'' = \{O_1; O_2\}$. ④ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_{I}. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_{II}. 0; 1 vagy 2 megoldás van.

842. Felhasználjuk: A keresett körök csak olyanok lehetnek, amik k_2-t belülről, k_1-et kívülről érintik. Az 839. feladatban láttuk, hogy az ilyen körök középpontjai a két kör középkörén vannak, sugaruk $r=\frac{r_2-r_1}{2}$. Az e egyenest érintő körök középpontjai az e-től r távolságra lévő párhuzamos egyenespáron vannak. A szerkesztés: ① k_1 és k_2 középköre: k'. ② e-től r távolságra levő párhuzamos egyenesek: f_1 és f_2. ③ $k' \cap f_1 = \{O_1; O_2\}$ és $k' \cap f_2 = \{O_3; O_4\}$. ④ O_i középpontú, r sugarú kör: k_i $(1 \le i \le 4)$. 4 megoldás van.

843. Felhasználjuk: k' átmegy O-n és P-n, ha középpontja rajta van az OP szakaszfelező merőlegesén. k' érinti k-t, ha O; K és E egy egyenesen vannak. $\Rightarrow$ OE a k' kör átmérője $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $POE\triangle$ P-ben derékszögű. A szerkesztés: ① OP felezőmerőlegese: f_{OP}. ② P-ben merőleges OP-re: e. ③ $e \cap k = \{E; F\}$. ④ $OE \cap f_{OP} = K_1$ és $OF \cap f_{OP} = K_2$. ⑤ K_1 középpontú, K_1P sugarú kör: k_1'. K_2 középpontú, K_2P sugarú kör: k_2'. Nincs megoldás, ha P a körön kívül van. Egy megoldás van, ha $P \in k$. Két megoldás van, ha P a kör belső pontja, de nem azonos O-val. Végtelen sok megoldás van, ha $P \equiv O$.

844. *a)* $k_1 \cap k_2 = \emptyset$. *b)* k_1 kívülről érinti k_2-t. *c)* $k_1 \cap k_2 = \{A; B\}$. *d)* k_2 belülről érinti k_1-t. *e)* k_1 tartalmazza k_2-t. *f)* k_1 és k_2 koncentrikusak.

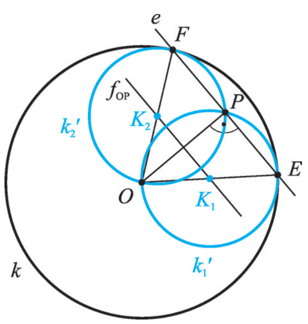
845. A szerkesztés: ① AB alaphoz tartozó magasság: m_c, talppontja F (m_c szimmetriatengely, tehát a két szerkesztendő kör erre a tengelyre vonatkozóan egymás tükörképe). ② $AFC\triangle$ beírt körének középpontja két szögfelező metszéspontja $\Rightarrow$ k_1 kör. ③ k_1-et tükrözzük m_c egyenesére: k_2. Egyértelmű a megoldás.

846. A szerkesztendő kör a PQ ívet annak F felezéspontjában érinti. F-ben közös a kör és a PQ ív érintője, ami AF-re merőleges és B-ben, illetve C-ben metszi AP, illetve AQ félegyeneseket. $\Rightarrow$ Az $ABC\triangle$ beírt körét kell megszerkeszteni AF és f_β segítségével. A feladat egyértelműen megoldható.

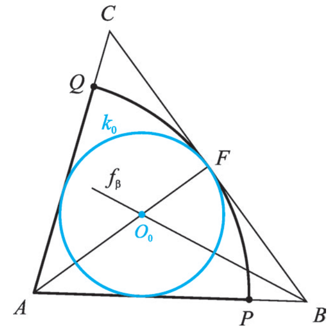
847. Az oldalíveket a felezéspontjukban érinti a szerkesztendő kör. A kör középpontja az $ABC\triangle$ beírt körének középpontjával azonos. A kör sugara az OF távolság, ahol F az ívháromszög egyik oldalívének felezéspontja. A feladat egyértelműen megoldható.

848. A keresett körök az adott kör középpontja körüli 120°-os forgatással egymásba vihetők. Osszuk fel az adott kört 3 db 120°-os középponti szögű egybevágó körcikkre! A 846. feladatnál látott módon mindegyik körcikkbe megszerkesztjük a beírt kört.

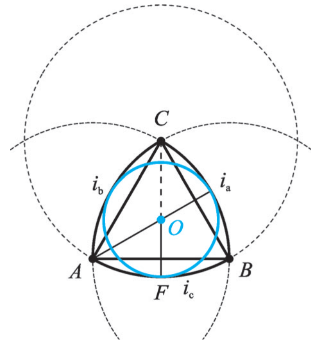
843.



846.

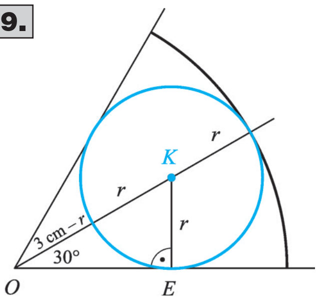


847.

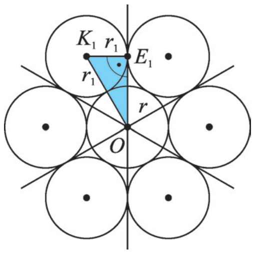


I

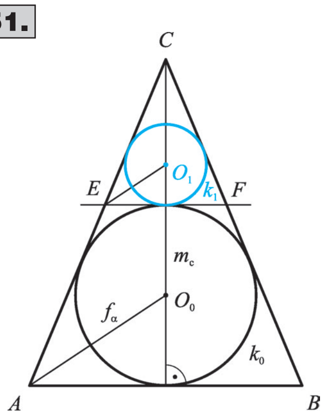
849.



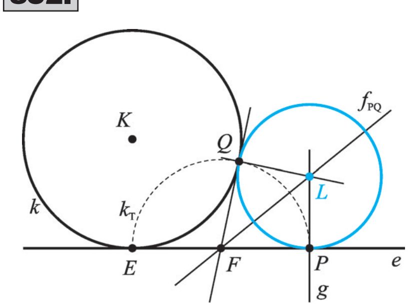
850.



851.



852.



849. A keresett körök az adott kör középpontja körüli 60°-os forgatással egymásba vihetők. Osszuk fel az adott kört 6 db egybevágó körcikkre. Az 846. feladatnál látott módon mindegyik körcikkbe megszerkesztjük a beírt kört. Az OEK derékszögű háromszögben 30° és 60° a hegyesszögek, ezért $OK = 2KE$, $3\text{ cm} - r = 2r \Rightarrow r = 1\text{ cm}$.

850. Osszuk fel az O-nál levő teljesszöget 6 db 60°-os szögtartományra! Az adott körből egy-egy körcikket vágunk ki 60°-os középponti szöggel, és a szögszárakat és ezt a körcikket kívülről érintő kört keresünk. A K_1E_1O derékszögű háromszögben 30° és 60° a hegyesszögek, tehát $2r_1 = r_1 + r$, azaz $r_1 = r$. A szerkesztendő körök sugara az adott kör sugarával egyenlő, így a 60°-os szög száraival r távolságban húzott párhuzamosok metszéspontja lesz a keresett kör középpontja.

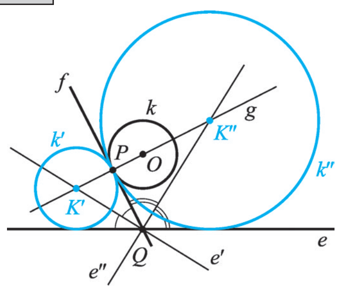
851. A keresett körnek és az $ABC\triangle$ beírt körének középpontja, valamint a két kör érintési pontja az alaphoz tartozó magasságon van. k_o AB-vel párhuzamos másik érintője közös érintő a két körhöz. A szerkesztés: ① k_0 beírt kör szerkesztése f_α és m_c segítségével. ② k_0 AB-vel párhuzamos érintője: EF. ③ $EFC\triangle$ beírt körének szerkesztése $CEF\sphericalangle$ szögfelezője és m_c segítségével: k_1. Egyértelmű a megoldás.

852. **1. eset:** $P \equiv E$. Végtelen sok ilyen kör van, középpontjaik az E-ben e-re állított merőlegesen vannak. **2. eset:** $P \not\equiv E$. Felhasználjuk: A szerkesztendő és az eredeti kör közös belső érintőjének a közös külső érintővel való metszéspontja F. Az érintő szakaszok egyenlősége miatt $EF = FQ = FP \Rightarrow E$, Q, P az F középpontú, EP átmérőjű körön vannak. A szerkesztés: ① EP átmérőjű kör $\rightarrow k_T$. ② $k_T \cap k = \{E; Q\}$. ③ PQ felezőmerőlegese $\rightarrow f_{PQ}$. ④ P-ben merőleges e-re $\rightarrow g$. ⑤ $f_{PQ} \cap g = L$. ⑥ L középpontú, LP sugarú kör. Egyértelmű a megoldás.

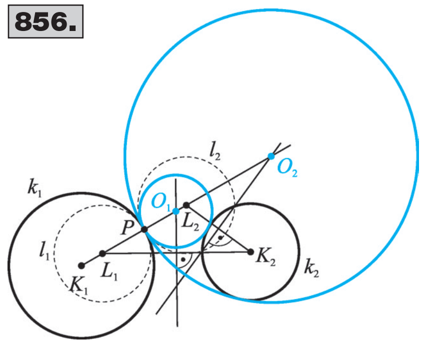
853. Felhasználjuk: Két egymást érintő körnek a közös pontban közös az érintője. Két egymást érintő kör centrálisa tartalmazza a közös pontot. A szerkesztés: ① OP centrális: g. ② OP-re merőleges P-ben: közös érintő, f. ③ f és e által meghatározott szögek szögfelezői: e'; e''. ④ $e' \cap g = K'$, K' középpontú, $K'P$ sugarú kör: k'. $e'' \cap g = K''$, K'' középpontú, $K''P$ sugarú kör: k''. Nincs megoldás $e \equiv g$ esetén, egyébként 1 vagy 2 megoldás lehet.

854. Az l érintő kör K középpontja rajta van az r sugarú körök középpontjait összekötő szakasz f felezőmerőlegesén és az O_1P egyenesen, ahol $P \in k_1$. Húzzunk O_1-en át párhuzamost f-fel: f_1. $f_1 \cap k_1 = \{A; B\}$. Kívülről érintő kör esetén P pont az AB átmérő által meghatározott k_2-höz közelebbi nyílt félkörön, belülről érintő kör esetén a k_2-től távolabbi nyílt félkörön van. Ha $P \equiv A$ vagy $P \equiv B$, akkor nincs érintő kör.

853.



856.



855. A 854. feladatban láttuk: a kívülről érintés feltétele, hogy P a k_2-höz közelebbi félkörön, a belülről érintésé pedig, hogy P a k_2-től távolabbi félkörön legyen. A szerkesztés: ① O_1O_2 felezőmerőlegese: $f_{O_1O_2}$. ② e(P; O_1) ∩ $f_{O_1O_2} = K$. ③ K középpontú, KP sugarú kör: k.

856. Ha azt szeretnénk, hogy a keresett kör P-ben érintse k_1-et, közös kell legyen a P-beli érintőjük, ezért k_1 helyett bármilyen más P-n átmenő kört is vehetünk, aminek PK_1 félegyenesen van a középpontja. A szerkesztés: ① Legyen l_i olyan L_i középpontú, r_2 sugarú kör, amelyre $L_i \in PK_1$ és $P \in l_i$ ($i \in \{1; 2\}$). ② l_i-t és k_2-t érintő körök középpontjai a tengelyes szimmetria miatt L_iK_2 felezőmerőlegesén vannak → $f_{L_iK_2}$. ③ e(K_1; P) ∩ $f_{L_iK_2} = O_i$. ④ O_i középpontú, O_iP sugarú kör. 1 vagy 2 megoldás lehet.

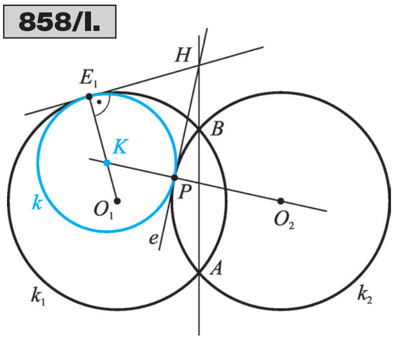
857. Legyen a közös részt határoló ív adott pontja P, és a P-t tartalmazó kör középpontja O_2. A keresett kör K középpontja rajta van az O_2P egyenesen, a tengelyes szimmetria miatt pedig az AB egyenesen, ahol A és B a körök közös pontjai. A szerkesztés: ① e(O_2; P) ∩ e(A; B) = K. ② K középpontú, KP sugarú kör: k. Egyértelmű a megoldás.

858. **1. eset:** $P \notin$ e(O_1; O_2). A szerkesztés: ① A keresett kör K középpontja rajta van az O_2P egyenesen. ② P-ben közös a k és k_2 kör érintője: e. ③ e ∩ e(A; B) = $= H$. ④ $HE_1 = HP$ miatt az E_1 érintési pont kijelölhető a k_1 körön. ⑤ e(E_1; O_1) ∩ e(P; O_2) = K. ⑥ K középpontú, KP sugarú kör: k. Egyértelmű a megoldás.

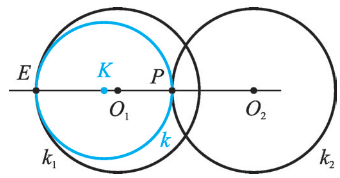
2. eset: $P \in$ e(O_1; O_2). A PE átmérőjű kör a megoldás.

859. **1. eset:** k belülről érinti k_1-et és kívülről k_2-t. A k kör P-ben érinti k_2-t, ha P-ben közös az érintőjük. Cseréljük ki a k_2 kört arra a P-n átmenő k_2' körre, aminek az O_2' középpontja rajta van PO_2 félegyenesen, sugara pedig r_1-gyel egyenlő. k_2' és k_1 körök teljesítik a 858. feladat feltételeit, tehát az ott leírt eljárással szerkeszthető meg a k kör.

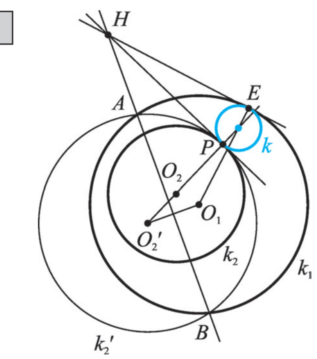
858/I.



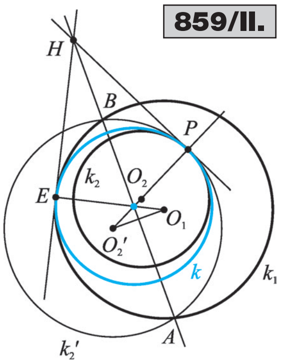
858/II.



859/I.



859/II.



2. eset: k belülről érinti k_1-et, és k_2 belülről érinti k-t. Az 1. esetnél vázolt módszerrel a megoldás visszavezethető a 857. feladatra. Minden P ponthoz egyértelműen található az 1. és a 2. esetnek megfelelő megoldás is.

860. Legyen az egyik kör pontja A_1, a másiké A_2. Kössük össze A_1-et és A_2-t a két kör közös érintési pontjával, E-vel! E, O_1 és O_2 az érintkezés miatt egy egyenesen vannak. $EO_2A_2\sphericalangle = EO_1A_1\sphericalangle$, mert váltószögek. $EO_2A_2\triangle$ és $EO_1A_1\triangle$ egyenlő szárú, szárszögük az előbbiek miatt egyenlő, tehát az alapon fekvő szögeik is egyenlők: $\underline{O_2EA_2\sphericalangle} = EA_2O_2\sphericalangle = \underline{O_1EA_1\sphericalangle} = EA_1O_1\sphericalangle$. Az aláhúzott egyenlőség azt jelenti, hogy A_1A_2 egyenes átmegy E-n, hiszen ezeknek a szögeknek az O_2E, illetve O_1E szára ugyanannak az egyenesnek két kiegészítő félegyenese, egyenlőségük és helyzetük miatt a másik szárnak is ilyennek kell lenni.

861. Legyen az egyik kör pontja A_1, a másiké A_2. Kössük össze A_1-et és A_2-t a két kör közös érintési pontjával, E-vel! E, O_1 és O_2 az érintkezés miatt egy egyenesen vannak. $EO_2A_2\sphericalangle = EO_1A_1\sphericalangle$, mert egyállású szögek. $EO_2A_2\triangle$ és $EO_1A_1\triangle$ egyenlő szárú, szárszögük az előbbiek miatt egyenlő, tehát az alapon fekvő szögeik is egyenlők: $\underline{O_2EA_2\sphericalangle} = EA_2O_2\sphericalangle = \underline{O_1EA_1\sphericalangle} = EA_1O_1\sphericalangle$. Az aláhúzott egyenlőség azt jelenti, hogy A_1A_2 egyenes átmegy E-n, hiszen ezeknek a szögeknek az O_2E, illetve O_1E szára ugyanannak az egyenesnek két félegyenese. Egyenlőségük és helyzetük miatt a másik szárnak is ilyennek kell lenni.

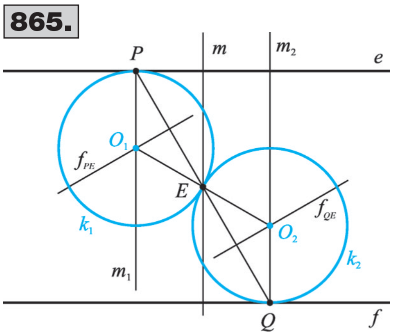
862. Legyen $P \in e$ a közös érintő E-től különböző tetszőleges pontja! P-ből k_1-hez húzott érintőszakaszok egyenlők, tehát $\underline{PE_1 = PE}$. P-ből k_2-hez húzott érintőszakaszok egyenlők, tehát $\underline{PE_2 = PE}$. Az aláhúzott egyenlőségekből $\Rightarrow PE_1 = PE_2$. Az állítás kívülről és belülről érintő körökre egyaránt igaz.

863. Legyen az e egyenesen kijelölt két érintési pont P és Q. Legyen a két kör E-beli közös érintőjének e-vel való metszéspontja F! F-ből k_1-hez húzott érintőszakaszok egyenlők, tehát $PF = FE$. Hasonlóan: $QF = FE$. $FP = FE = FQ$ miatt E rajta van a PQ átmérőjű körön. Ennek a körnek P-től és Q-tól különböző bármely pontja egyértelműen meghatároz két érintő kört. A keresett ponthalmaz tehát a PQ átmérőjű kör, P-t és Q-t kivéve.

864. Legyen a k_1 és k_2 körök érintési pontja E, közös érintőszakaszuk E_1E_2, F pedig az E_1E_2 átmérőjű kör középpontja! $FE_1 = FE_2$ e kör sugara. $FE_1 = FE$, mert az F-ből k_1-hez húzott érintőszakaszok egyenlők. $\Rightarrow E$ rajta van az F középpontú E_1E_2 átmérőjű körön.

865. Adott: e; $P \in e$; f; $Q \in f$. A szerkesztés: ① k_1 P-ben érinti e-t, ezért O_1 rajta van a P-ben e-re állított merőlegesen $\rightarrow m_1$. ② Hasonlóan: $O_2 \in m_2$. ③ A körök egyenlő sugara miatt az E érintési pont rajta van m_1 és m_2 középpárhuzamosán, m-en. A 860. feladat feltételei teljesülnek a PO_1 és O_2Q ellentétes irányú párhuzamos sugarakra $\Rightarrow$ a közös E érintési pont rajta van PQ-n. ④ $PQ \cap m = E$. ⑤ $f_{PE} \cap m_1 = O_1$ és $f_{QE} \cap m_2 = O_2$. Megjegyzés: A két kör nem feltétlenül esik a párhuzamosok által meghatározott sávba. A feladat egyértelműen megoldható.

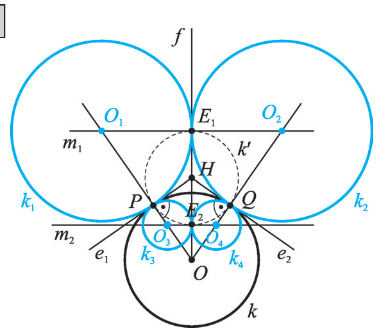
865.



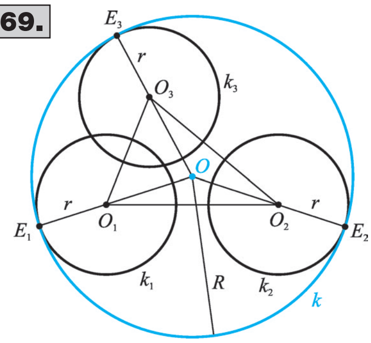
866. A négy kör sugara egyenlő. A négyzet K középpontja körüli negyedrendű forgásszimmetriája miatt a körök egymásba forgathatók. $KE_1 = KE_2$, mert a K-ból k_1-hez húzott érintőszakaszok hossza egyenlő. Hasonlóan: $KE_2 = KE_3$; $KE_3 = KE_4$ és $KE_4 = KE_1$. $E_1E_2E_3E_4$ olyan négyszög, amelynek átlói merőlegesen felezik egymást és egyenlők, tehát ez a négyszög négyzet.

867. A szerkesztés: ① k_1 E_1-ben érinti e-t, ezért $O_1 \in m_1$ ($m_1 \perp e$; $E_1 \in m_1$). ② Hasonlóan $O_2 \in m_2$ ($m_2 \perp e$; $E_2 \in m_2$). ③ A közös érintési pont rajta van m_1 és m_2 egyenesek középpárhuzamosán, m-en. ④ $d(m; m_1) = d(m; m_2) = r$ a körök sugara. ⑤ r távolságra párhuzamost húzunk e-vel: f. ⑥ $f \cap m_1 = O_1$ és $f \cap m_2 = O_2$.

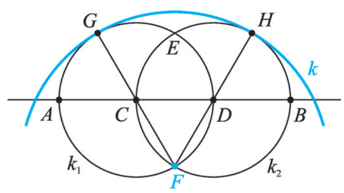
868.



869.



870.



⑦ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. A másik félsíkban is kapunk megoldást, így összesen két körpár létezik.

868. Mivel egyenlő sugarú köröket keresünk, k_1 és k_2 közös belső érintője a $POQ\sphericalangle$ szögfelezője lesz. k-nak P-beli és Q-beli érintője a fenti szögfelező H pontjában metszik egymást. H-ból k_1-hez húzott érintőszakaszok egyenlők: $HP = HE$. H-ból k_2-hez húzott érintőszakaszok egyenlők: $HQ = HE$. A szerkesztés: ① $POQ\sphericalangle$ szögfelezője: f. ② k kör P-beli érintője: e_1. ③ $e_1 \cap f = H$. ④ H középpontú, HP sugarú kör: k'. ⑤ $k' \cap f = \{E_1; E_2\}$. ⑥ E_i-ben merőleges f-re: m_i. ⑦ $m_1 \cap \mathrm{e}(O; P) = \{O_1; O_3\}$ és $m_2 \cap \mathrm{e}(O; Q) = \{O_2; O_4\}$. ⑧ O_i középpontú, O_iP, illetve O_iQ sugarú kör: k_i $(1 \le i \le 4)$. Egy körpár létezik, ha PQ átmérő. Egyébként két körpár a megoldás.

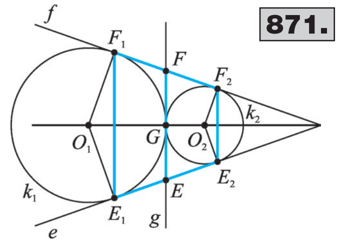
869. A közös érintési pontnak a centrálison kell lennie, ezért E_1; O_1; O és E_2; O_2; O és E_3; O_3; O egy-egy egyenesen vannak. $OO_1 = R - r$; $OO_2 = R - r$; $OO_3 = R - r \Rightarrow O$ az $O_1O_2O_3\triangle$ körülírt körének középpontja. A szerkesztés: ① $O_1O_2O_3\triangle$ körülírt körének középpontja: O. ② O középpontú, $(OO_1 + r)$ sugarú kör: k. Nincs megoldás, ha O_1; O_2; O_3 egy egyenesen vannak.

870. Jelöljük az AB szakasz harmadának hosszát r-rel. $CE = CF = DE = DF = r$. Az F-ből induló átmérő másik végpontja G, $2r$ távolságra van F-től. $\Rightarrow$ G rajta van az F középpontú, $2r$ sugarú k körön. A k_1 és k körök érintik egymást G-ben, mert k_1 középpontja C, k középpontja F és a két kör közös pontja G egy egyenesen vannak. Hasonlóan megmutatható, hogy k_2 H-ban érinti k-t.

Körök és érintők

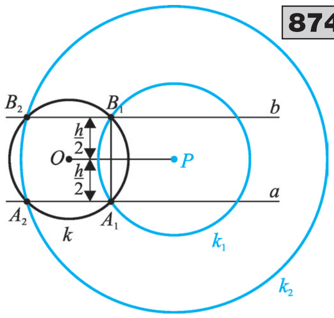
871. Az O_1O_2 centrálisra való tengelyes szimmetria miatt $E_1E_2F_2F_1$ húrtrapéz, mivel a szimmetriatengely oldalakat felez. $\Rightarrow$ $E_1E_2 = F_1F_2$. Legyen a két kör közös belső érintője g. $EG = EE_1$ a k_1 körhöz, $EG = EE_2$ a k_2 körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt. $\Rightarrow$ g felezi az E_1E_2, illetve F_1F_2 szakaszokat $\Rightarrow$ EF a trapéz középvonala. $FE = FG + GE = 2FG = F_1F + FF_2 = F_1F_2 = E_1E_2$.

871.

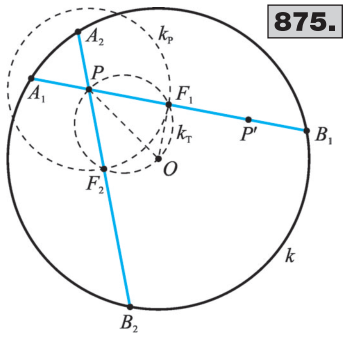


872. Legyen a két adott pont P és Q, az adott távolság r. A szerkesztés: ① Q-tól r távolságra lévő pontok halmaza a Q középpontú, r sugarú kör: k. ② P-ből szerkesszünk k-hoz érintőt $\rightarrow e_1$; E_1; e_2; E_2. ③ $PE_1 \perp QE_1$ miatt $\mathrm{d}(Q; e_1) = r$ és $PE_2 \perp QE_2$ miatt $\mathrm{d}(Q; e_2) = r$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

I



874.



875.

873. Legyen a két adott pont P és Q, az érintőszakasz e. A szerkesztés: ① Az E érintési pont rajta van PQ Thalész körén: k_T. ② Az E érintési pont e távolságra van P-től $\to k_P$. ③ $k_P \cap k_T =$ $= \{E_1; E_2\}$. ④ Q középpontú, QE sugarú kör: k. P és Q szerepe felcserélhető. 0 vagy 1 megoldás lehet.

874. A szerkesztés: ① k és k_1 körök közös húrja szimmetrikus az OP centrális egyenesére. ② OP-vel párhuzamos $h/2$ távolságra: a és b. ③ $a \cap k = \{A_1; A_2\}$ és $b \cap k = \{B_1; B_2\}$. ④ P középpontú, $PA_1 = PB_1$ sugarú kör: k_1. P középpontú, $PA_2 = PB_2$ sugarú kör: k_2. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

875. Felhasználjuk: A feltétel szerint $PB - PA = h$. Ha B-ből PA-val egyenlő szakaszt mérünk az AB húrra, akkor a kapott P' pontra teljesül, hogy $PP' = h$. PP' felezéspontja AB felezéspontjával megegyezik, így $OFP\sphericalangle = 90°$. A szerkesztés: ① OP Thalész köre: k_T. ② P középpontú, $h/2$ sugarú kör: k_P. ③ $k_P \cap k_T = \{F_1; F_2\}$. ④ PF_1 húrja A_1B_1 és PF_2 húrja A_2B_2. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

876. A közös belső érintő az O_1O_2 centrálisra E-ben állított merőleges: e. A közös külső érintők szerkesztése: **1. eset:** Ha $r_1 = r_2 = r$, akkor a centrálistól r távolságra húzódó párhuzamos egyenespár a két külső érintő.

2. eset: Ha $r_1 > r_2$, akkor O_2-ből érintőket szerkesztünk az O_1 középpontú, $(r_1 - r_2)$ sugarú körhöz, majd ezeket az érintőket rájuk merőlegesen a k_1 körvonalig toljuk: e_1 és e_2. (Részletesebb megoldás az 568. feladatnál.)

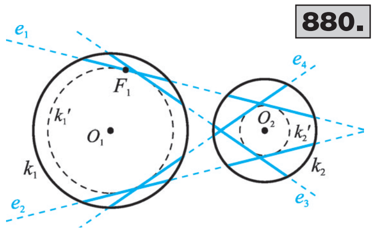
877. Vegyünk fel egy O_1 középpontú, 2 cm sugarú k_1 kört és egy O_2 középpontú, 3 cm sugarú k_2 kört. A k_1 és k_2 körök közös érintői teljesítik a feladat elvárásait. A közös érintők szerkesztését lásd a 876. vagy az 568. feladatnál!

878. A két kör tengelyesen szimmetrikus az O_1O_2 szakasz felezőmerőlegesére, így a közös belső érintők szimmetrikusak lesznek az O_1O_2 szakasz felezéspontjára, P-re. P-ből érintőket szerkesztünk az egyik körhöz, ezek a szimmetria miatt érintik a másik kört is. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

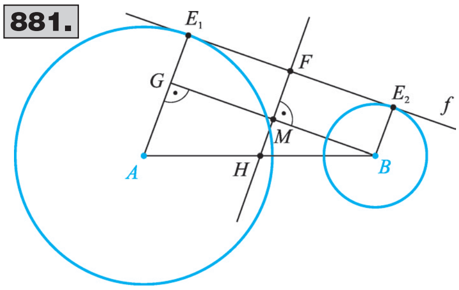
879. Jelöljük a körök középpontját O_1-gyel, illetve O_2-vel, sugarát r_1-gyel, illetve r_2-vel. Nincs közös érintőjük: $O_1O_2 < r_2 - r_1$. 1 közös érintőjük van: $O_1O_2 = r_2 - r_1$. 2 közös érintőjük van: $r_2 - r_1 < O_1O_2 < r_2 + r_1$. 3 közös érintőjük van: $O_1O_2 = r_2 + r_1$. 4 közös érintőjük van: $O_1O_2 > r_2 + r_1$.

880. Felhasználjuk: A 776. feladatban láttuk, hogy a k_1 kör h_1 hosszú húrjainak F_1 felezéspontjai az O_1 középpontú, $\sqrt{r_1^2 - \frac{h_1^2}{4}}$ sugarú körön vannak. E kör F_1-beli érintője merőleges O_1F_1-re, tehát a k_1 kör h_1 hosszú húrjához vezet. Hasonlót mondhatunk el a k_2 kör h_2 hosszú húrjairól is. A szerkesztés: ① O_1 középpontú, $\sqrt{r_1^2 - \frac{h_1^2}{4}}$ sugarú kör: k_1'. ② O_2 középpontú, $\sqrt{r_2^2 - \frac{h_2^2}{4}}$

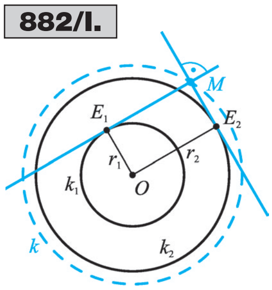
880.



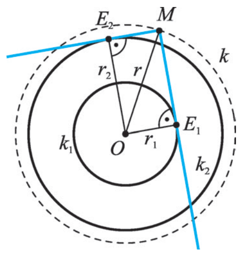
881.



882/I.



882/II.



sugarú kör: k_2'. k_1' és k_2' közös érintőinek megszerkesztése (lásd 568. feladat). k_1' és k_2' helyzetétől függően 0; 1; 2; 3 vagy 4 megoldás lehet.

881. Induljunk ki a kész ábrából! ABE_2E_1 négyszög derékszögű trapéz, párhuzamos oldalai $AE_1 = r_1$, $BE_2 = r_2$, derékszögű szára $E_1E_2 = e$. Húzzuk meg a trapéz B-ből induló magasságát: $GB = e$. A magasságnak a középvonallal való metszéspontja M, $MB = e/2$. A szerkesztés: ① AB felezéspontja H. ② HB Thalész köre: k_T. ③ B középpontú, $e/2$ sugarú kör: k_B. ④ $k_T \cap k_B = M$. ⑤ H-ból HM félegyenesre $\frac{r_1 + r_2}{2}$ szakasz felvétele → F. ⑥ F-ben merőleges HF-re: f. ⑦ A-ból merőleges f-re → E_1. B-ből merőleges f-re → E_2. ⑧ A középpontú, AE_1 sugarú kör és B középpontú, BE_2 sugarú kör. Nincs megoldás, ha $e > AB$, egyébként egy körpár létezik.

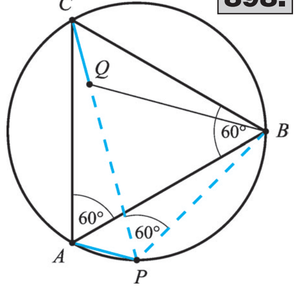
882. A keresett derékszög M csúcsa, szárainak k_1, illetve k_2 körrel való érintési pontjai és a közös körközéppont téglalapot határoznak meg. $OE_2 = E_1M = r_2$ és $OE_1 = E_2M = r_1 \Rightarrow OM = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = r$. Az M pontok O középpontú, r sugarú k körön vannak. A k kör tetszőleges M pontjára Pitagorasz tételéből $E_2M = r_1$ és $E_1M = r_2$, ezért E_1ME_2O paralelogramma. $OE_1 \perp E_1M$, így E_1ME_2O téglalap $\Rightarrow E_2ME_1\sphericalangle = 90°$. ⇒ A k kör bármely pontjához egyértelműen tartozik két érintő, melyek derékszöget zárnak be egymással. A keresett ponthalmaz tehát az O középpontú, r sugarú kör.

Kerületi és középponti szögek

883. 90°, illetve 45°; 270°, illetve 135°; 144°, illetve 72°; 300°, illetve 150°; 108°, illetve 54°.
884. $\beta = 60°$ és $\alpha = 120°$. **885.** $\beta = 36°42'16''$ és $\alpha = 73°24'32''$. **886.** $d(K;AB) = 5$ cm.
887. $d(K;\ AB) = 2$ cm. **888.** $APB\sphericalangle = 148°$. **889.** $\gamma = 63°$, $\alpha = 34°$, $\beta = 83°$.
890. $BKC\sphericalangle = 2\alpha$. **891.** $AQB\sphericalangle = 52°$. **892.** 56,5° alatt; 132,5° alatt; E és F pontokból 0° alatt. **893.** 30° alatt; 150° alatt; A-ból és B-ből 0° alatt. **894.** 120°. **895.** $ABC\sphericalangle = 60°$.
896. A K középpontú körben AC átmérő, AB húr és $BAC\sphericalangle = 30°$. $BKC\sphericalangle = 2BAC\sphericalangle = 60°$, $BK = CK = r$.

897. Legyen az érintőnek az átmérő egyenesével való metszéspontja D. $BKC\sphericalangle = 2 \cdot BAC\sphericalangle = 60° \Rightarrow$ a BKD derékszögű háromszögben $2BK = KD = KC + CD$, és mivel $BK = KC$, $BK = CD$.

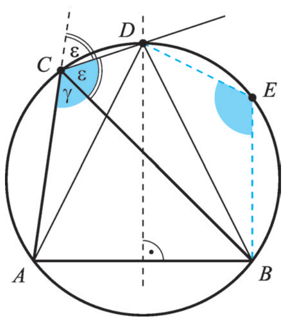
898.



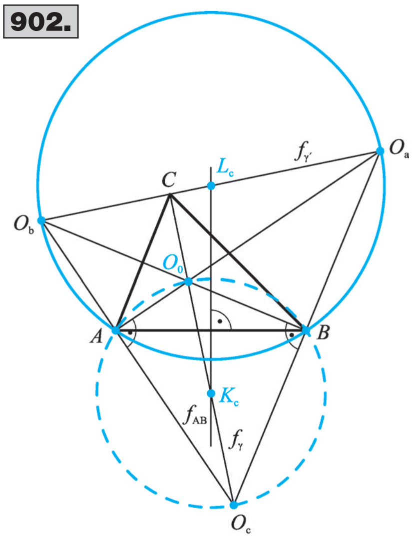
898. **1. eset:** P a C-t nem tartalmazó AB ív belső pontja. $ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow BPC\sphericalangle = BAC\sphericalangle = 60°$, mert BC ívhez tartozó kerületi szögek. Legyen $Q \in PC$ olyan pont, amelyre $PQ = QB \Rightarrow PQB\triangle$ szabályos. Tekintsük a B pont körüli $+60°$-os elforgatást: $C' = A$, $Q' = P$, $B' = B \Rightarrow BQC\triangle \cong BPA\triangle$. $\Rightarrow AP = QC$ és $PC = PQ + QC = PB + AP$. Hasonlóan belátható az állítás a kör másik két ívén levő pontokra.
2. eset: $P \equiv B$. $PA + PB = BA + BB = BA = BC = PC$.

I

901.



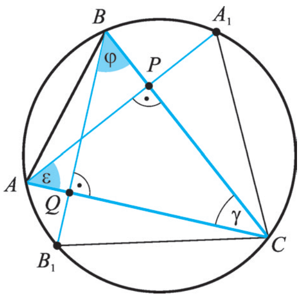
902.



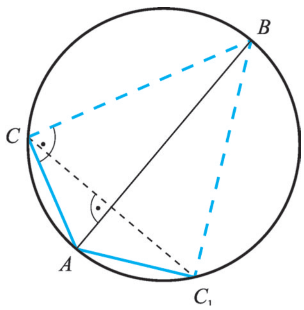
899. Jelöljük a B csúcsból induló szögfelező és a kör metszéspontját D-vel. BD szögfelező, ezért $ABD\sphericalangle = DBC\sphericalangle$, így AD ív egyenlő DC ívvel $\Rightarrow AD = DC$.

900. Az előző feladat jelöléseit használva: BD szögfelező, ezért $ABD\sphericalangle = DBC\sphericalangle$, így AD ív egyenlő DC ívvel $\Rightarrow AD = DC \Rightarrow D$ rajta van az AC felezőmerőlegesén, ugyanakkor a szögfelezőn és a háromszög köré írható körön is. Megjegyzés: Ha $AB = BC$, akkor az $ABC\sphericalangle$ felezője és az AC oldal felezőmerőlegese egybeesik és az AC ív felezőpontján halad át.

904/I.



904/II.



901. AD húr C-ből $(\gamma + \varepsilon)$ szög alatt látszik. DB húr C-ből ε szög alatt látszik, ezért E-ből $(180° - \varepsilon) = \gamma + \varepsilon$ szög alatt $\Rightarrow AD = DB \Rightarrow D$ rajta van AB felezőmerőlegesén is. Megjegyzés: Ha $AC = CB$, akkor γ külső szögének felezője érinti C-ben a körülírt kört.

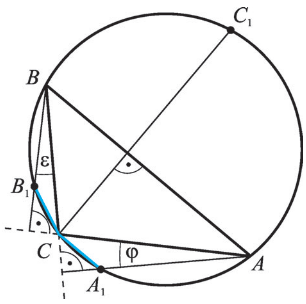
902. $O_0A \perp AO_c$, illetve $O_0B \perp BO_c$, mert ugyanazon csúcshoz tartozó külső és belső szögfelezők. $\Rightarrow A$ és B rajta vannak O_0O_c Thalész körén. A kör középpontja O_0O_c felezéspontja, másrészt rajta van AB felezőmerőlegesén, így a K_c középpont az f_γ szögfelező és az f_{AB} oldalfelező merőleges metszéspontja. A 900. feladat szerint ez a pont rajta van az $ABC\triangle$ köré írt körön.

903. A 902. ábra jelöléseit használjuk. $O_bA \perp AO_a$, ill. $O_aB \perp BO_b$, mert ugyanazon csúcshoz tartozó külső és belső szögfelezők. $\Rightarrow$ $\Rightarrow A$ és B rajta vannak O_aO_b Thalész körén. A kör középpontja O_aO_b felezéspontja, másrészt rajta van AB felezőmerőlegesén, így az L_c középpont az $f_{\gamma'}$ szögfelező és az f_{AB} oldalfelező merőleges metszéspontja. A 901. feladat szerint ez a pont rajta van az $ABC\triangle$ köré írt körön.

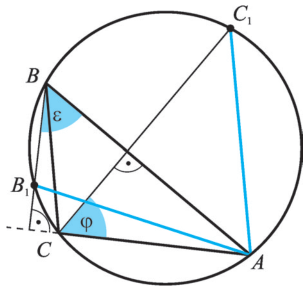
904. **1. eset:** $ABC\triangle$ hegyesszögű. A_1C az A-ból ε alatt látszik, APC derékszögű háromszög $\Rightarrow \varepsilon = 90° - \gamma$. B_1C a B-ből φ alatt látszik, BQC derékszögű háromszög $\Rightarrow \varphi = 90° - \gamma$. $\Rightarrow \varepsilon = \varphi \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{\underline{A_1C = B_1C}}$.

2. eset: $ABC\triangle$ derékszögű. m_a és m_b C-ben, m_c C_1-ben metszi a körülírt kört. m_a-t és m_b-t tekintve egybeesnek a pontok, a távol-

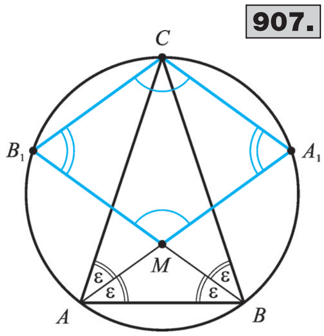
904/III.



904/IV.



907.



I

ság 0. m_a-t és m_c-t tekintve $CB = C_1B$, mert tükörképek AB-re. m_c-t és m_b-t tekintve $CA = C_1A$, mert tükörképek AB-re.

3. eset: $ABC\triangle$ tompaszögű. I. $\gamma + \gamma' = 180°$; B_1C a B-ből $\varepsilon = 90° - \gamma'$ alatt látszik, A_1C az A-ból $\varphi = 90° - \gamma'$ alatt látszik $\Rightarrow \varepsilon = \varphi \Rightarrow B_1C = A_1C$. II. B_1A a B-ből $\varepsilon = 90° - \alpha$ alatt látszik, C_1A a C-ből $\varphi = 90° - \alpha$ alatt látszik $\Rightarrow \varepsilon = \varphi \Rightarrow B_1A = C_1A$.

905. A feladatban említett húr nem jön létre, ha derékszögű háromszög befogókhoz tartozó magasságait tekintjük. Egyébként a 904. feladatból tudjuk, hogy $B_1C = A_1C$. $\Rightarrow$ A C-ből A_1B_1-re bocsátott merőleges az A_1B_1 felezőmerőlegese, tehát áthalad a kör középpontján.

906. A 904. feladat jelöléseit használjuk. Derékszögű háromszögnél nem jön létre $A_1B_1C_1\triangle$. Egyébként a 904. feladatból tudjuk, hogy $AB_1 = AC_1 \Rightarrow AA_1B_1\sphericalangle = AA_1C_1\sphericalangle$ és $BA_1 = BC_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow BB_1A_1\sphericalangle = BB_1C_1\sphericalangle$ és $CA_1 = CB_1 \Rightarrow CC_1A_1\sphericalangle = CC_1B_1\sphericalangle$.

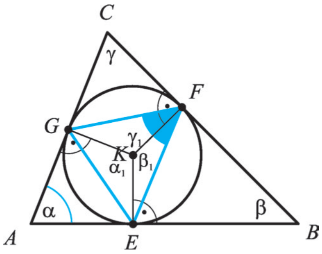
907. Kerületi szögek tétele miatt: $B_1BC\sphericalangle = B_1A_1C\sphericalangle$ és $B_1BA\sphericalangle = B_1A_1A\sphericalangle$, valamint $A_1AC\sphericalangle =$ $= A_1B_1C\sphericalangle$ és $A_1AB\sphericalangle = A_1B_1B\sphericalangle \Rightarrow \underline{CA_1M\sphericalangle = CB_1M\sphericalangle = 2\varepsilon}$.
Ezenkívül: $B_1MA_1\sphericalangle = AMB\sphericalangle = 180° - \varepsilon \Rightarrow \underline{B_1CA_1\sphericalangle = B_1MA_1\sphericalangle}$. Az aláhúzottakból következik, hogy a CB_1MA_1 négyszög szemközti szögei egyenlők, tehát a vizsgált négyszög paralelogramma.

908. $\underline{\underline{\alpha' = 180° - 2\alpha}}$; $\underline{\underline{\beta' = 180° - 2\beta}}$ és $\underline{\underline{\gamma' = 180° - 2\gamma}}$.

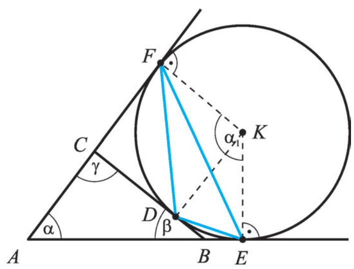
909. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre. $AEKG$ négyszögben $\alpha_1 = 180° - \alpha$. Kerületi és középponti szögek tétele miatt $GFE\sphericalangle = \alpha_1/2 = \underline{\underline{90° - \alpha/2}}$. Hasonlóan: $FEG\sphericalangle =$ $= \underline{\underline{90° - \gamma/2}}$ és $EGF\sphericalangle = \underline{\underline{90° - \beta/2}}$. Az $EFG\triangle$ minden szöge kisebb 90°-nál, ezért hegyesszögű.

910. $AEKF$ négyszögben $\alpha_1 = 180° - \alpha$. $FDE\sphericalangle$ ugyanahhoz az ívhez tartozó kerületi szög, amelyhez tartozó középponti szög $(360° - \alpha_1) \Rightarrow FDE\sphericalangle = \underline{\underline{90° + \alpha/2}}$. $DKFC$ négyszögben

909.



910.



$FCD\sphericalangle + FKD\sphericalangle = 180° \Rightarrow FKD\sphericalangle = \gamma$. $FED\sphericalangle$ kerületi szög és $FED\sphericalangle = FKD\sphericalangle/2 = \underline{\underline{\gamma/2}}$. $DBEK$ négyszögben $DKE\sphericalangle + DBE\sphericalangle = 180° \Rightarrow DKE\sphericalangle = \beta$. $DFE\sphericalangle$ kerületi szög és $DFE\sphericalangle = DKE\sphericalangle/2 = \underline{\underline{\beta/2}}$. $FDE\sphericalangle = 90° + \alpha > 90° \Rightarrow$ Az $FDE\triangle$ tompaszögű.

911. $\underline{\underline{60°}}$; $\underline{\underline{60°}}$ és $\underline{\underline{120°}}$.

912. Felhasználjuk: Ha AB-hez α kerületi szög tartozik, akkor ugyanahhoz az ívhez tartozó középponti szög 2α. $AK = BK$, ezért 2α szögfelezője merőlegesen felezi AB-t és a párhuzamosság miatt merőleges e-re is. A szerkesztés: ① a kör középpontjából merőlegest állítunk e-re: f. ② K-ban f két oldalára α; ezek szára kimetszi a körből A-t és B-t. Egyértelmű a megoldás.

913. *a)* 45°-os látószögköríven van a pont $\Rightarrow$ a középponti szög 90°. A szerkesztés: ① AB, A-ban és B-ben 45° azonos oldalon, ellentétes irányban. ② a két szögszár metszéspontja K. ③ K középpontú, KA sugarú kör. ④ az előbbi kör tükörképe AB-re. ⑤ a két nagyobb ív a keresett ponthalmaz, kivéve A-t és B-t.
b) 60°-os látószögköríven van a pont $\Rightarrow$ a középponti szög 120°. Ugyanúgy szerkesztünk, mint az *a)* pontban, csak 45° helyett 30° szerepel.
c) 150°-os látószögköríven van a pont. Ennek kiegészítő köríve a 30°-os látószögkörív. A szerkesztés az *a)* pontban látott módszerrel végezhető.

914. A szerkesztést érintőszárú kerületi szögekkel végezzük. A szerkesztés: ① AB felezőmerőlegese: f_{AB}. ② B-ben AB-re α, másik szára: e. ③ e-re merőleges B-ben: m. ④ $m \cap f_{AB} = K$. ⑤ K középpontú, KB sugarú körnek α szögtartományán kívüli AB íve. ⑥ AB ívet tükrözzük AB egyenesre.

915. Legyen a C-n átmenő egyenes AB alappal való metszéspontja D. $AC = BC \Rightarrow CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle \Rightarrow CD$ ugyanakkora szögben látszik A-ból, mint B-ből $\Rightarrow A$ és B a CD szakasz ellentétes félsíkba eső látószögkörívein vannak $\Rightarrow$ egyenlő az $ADC\triangle$ és a $BCD\triangle$ köré írt kör sugara.

916. *a)* 0; 1; 2; 3 vagy 4 metszéspont; *b)* 0; 1 vagy 2 metszéspont; *c)* 0; 1 vagy 2 metszéspont.

917. A híd két végpontját összekötő szakasz 30°-os látószögkörívének és a sétaútnak a közös pontjai a megfelelőek. Helyzetüktől függően 0; 1; 2; 3; 4, illetve végtelen sok megoldás lehet.

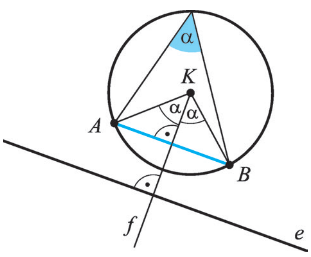
918. Végtelen sok közös pontja csak az egyenlő sugarú köríveknek lehet. Egyenlő sugarú körökben egyenlő hosszúságú húrokhoz tartozó kerületi szögek vagy egyenlők, vagy 180°-ra egészítik ki egymást. $\Rightarrow \alpha = \beta$ vagy $\alpha + \beta = 180°$.

919. A szerkesztés: ① AB Thalész-köre (90°-os látószögkörív): k_1. ② CB 120°-os látószögköríve: k_2. ③ $k_1 \cap k_2 = P$. Egyértelmű a megoldás.

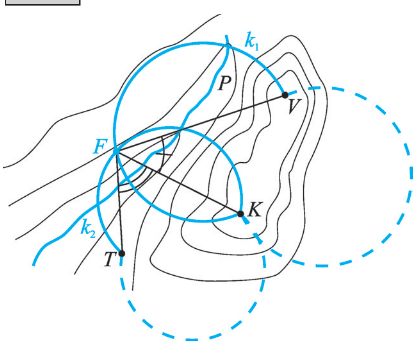
920. A szerkesztés: ① KV szakasz 45°-os látószögköríve: k_1. ② KT szakasz 60°-os látószögköríve: k_2. ③ k_1 és k_2 P-n túli metszéspontja a forrás helye a térképen.

921. Jelöljük a C csúcsnál keletkező érintő szárú kerületi szögeket ε-nal és φ-vel, az érintőnek az AB egyenessel való metszéspontját M-mel. **1. eset:** $\alpha > \beta$. α és ε ugyanazon íven nyugvó

912.



920.



kerületi szögek $\Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon = \alpha}}$. β és φ ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek $\Rightarrow \underline{\underline{\varphi = \beta}}$. α külső szöge az $ACM\triangle$-nek $\Rightarrow \delta = \alpha - \varphi = \underline{\underline{\alpha - \beta}}$. Ha ε, φ vagy δ tompaszög, akkor a hajlásszög a kiegészítő szög lesz.

2. eset: $\alpha < \beta$. Az 1. esethez hasonlóan megmutatható, hogy $\varepsilon = \alpha$; $\varphi = \beta$; $\delta = \beta - \alpha$.

3. eset: $\alpha = \beta$. Ekkor az érintő párhuzamos AB-vel. $\Rightarrow \varepsilon = \varphi = \alpha$ és $\delta = 0°$.

922. A 921. feladatból tudjuk, hogy $\varepsilon = \alpha$. A szerkesztés: ① BC-re C-ben az A-val ellentétes oldalra α. ② α szárának egyenese: e. Egyértelmű a megoldás.

923. A látószögkörív két körszeletet határol. Minél kisebb a körszelet magassága, annál nagyobb a látószög. Tehát a legkisebb magasságú olyan körszelet kell, aminek az AB húrja, és van közös pontja e-vel. $\Rightarrow$ Érintő körszeletet keresünk. $\Rightarrow$ AB felezőmerőlegese metszi ki e-ből az érintési pontot. $\Rightarrow$ Ez az a pont az e-n, ahonnan a legnagyobb szögben látszik AB.

924. P pont az AB szakasz felezőmerőlegesén van, ezért a 923. feladat alapján az MN szakaszon P a legkedvezőbb pont. A 16-os vonal többi pontja az $ABP\triangle$ körülírt körén kívül van, ezért onnan kisebb szögben látszik a kapu.

925. Az AB-hez tartozó legalább 90°-os látószögkörívnek nincs közös pontja e-vel. $\Rightarrow$ Hegyesszögű látószögkörív metszi ki e-ből a keresett pontot. A látószögkörív két körszeletet határol. Minél kisebb a körszelet magassága, annál nagyobb a látószög. Tehát a legkisebb magasságú olyan körszelet kell, aminek az AB húrja, és van közös pontja e-vel. $\Rightarrow$ Érintő körszeletet keresünk. A szerkesztés: ① AB felezőmerőlegese: f. ② $d(f; e) = r$. ③ B középpontú, r sugarú kör: k. ④ $k \cap f = K$. ⑤ K-ból merőleges e-re: g. ⑥ $g \cap e = E$. Két megoldás van.

926. Az 925. feladat alapján annak a körnek az érintési pontját keressük, amelynek AB a húrja és érinti az AB-re merőleges falakat. $ME_1 = FK$, ahol $AF = FB$. $AK = KE_1 = \frac{d}{2} + t$. AFK derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele $\Rightarrow FK^2 = AK^2 - FA^2 = \left(\frac{d}{2} + t\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = dt + t^2 \Rightarrow$

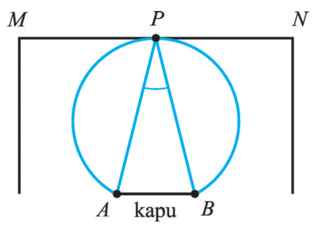
$$\Rightarrow \underline{\underline{FK = \sqrt{dt + t^2}}}.$$

927. *a)* A szerkesztés: ① $CB = a$. ② CB-vel $\parallel$ egyenes m_a távolságra: e. ③ CB α szögű látószögköríve: k. ④ $k \cap e = A$. 0; 2 vagy 4 egybevágó megoldás lehet.

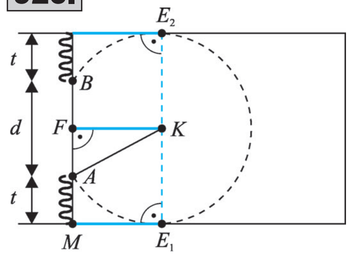
b) A szerkesztés: ① $CB = a$. ② CB felezőpontja: F. ③ F középpontú, s_a sugarú kör: k_1. ④ CB α szögű látószögköríve: k_2. ⑤. $k_1 \cap k_2 = A$. 0; 2 vagy 4 egybevágó megoldás lehet.

928. Adott az e és f félegyenes és szerkesztendő a g érintő úgy, hogy $EF = AB$ legyen, ahol $AB = a$ az adott szakasz. A szerkesztés: ① Olyan $\triangle$-et kell szerkeszteni, aminek egyik oldala $AB = a$, AB-vel szemközti szöge $\sphericalangle(e; f)$, és AB-hez tartozó magassága r. Ezt a szerkesztést l. a 927/*a* feladatnál. Így jutunk az $ABC\triangle$-höz, melynek adatait felhasználjuk a további szerkesztéshez. ② K középpontú, AC sugarú kör: k_1. ③ K középpontú, BC sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap e = E_1$; $k_1 \cap f = F_1$; $k_2 \cap e = E_2$; $k_2 \cap f = F_2$. ⑤ $E_1F_2 = g_1$; $E_2F_1 = g_2$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

924.



926.

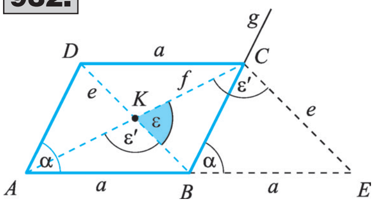


929. *a)* Felhasználjuk: Hosszabbítsuk meg AB-t A-n túl AC-vel, D-t nyerjük. $\Rightarrow DA = AC \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi = \alpha/2$. A szerkesztés: ① $CB = a$. ② CB $\alpha/2$ szögű látószögköríve: k_1. ③ B középpontú, $(b + c)$ sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = D$. ⑤ DC felezőmerőlegese: f_{DC}. ⑥ $f_{DC} \cap DB = A$. 0; 2 egybevágó vagy 2-2 egybevágó megoldás lehet.
b) Felhasználjuk: AB-re A-ból felmérjük AC-t, D-t nyerjük. $AD = AC \Rightarrow \varepsilon = 90° + \alpha/2$. A szerkesztés: ① $BC = a$. ② BC ε szögű látószögköríve: k_1. ③ B középpontú, $(c - b)$ sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = D$. ⑤ DC felezőmerőlegese: f_{DC}. ⑥ $f_{DC} \cap$ e$(D; B) = A$. 0; 2 egybevágó vagy 2-2 egybevágó megoldás lehet.
930. Felhasználjuk: A középpontos tükörképe BC oldal F felezéspontjára $A' \Rightarrow ABA'\sphericalangle = \alpha' =$ $= 180° - \alpha$. **1. eset:** $m_a < s_a$. A szerkesztés: ① s_a; m_a; $90° \to AFT\triangle$. ② A-t középpontosan tükrözzük F-re: A'. ③ AA' α' szögű látószögköríve: k. ④ $k \cap$ e$(T; F) = \{B; C\}$. Egyértelmű a megoldás.
2. eset: $m_a = s_a \Rightarrow AC = AB$. A szerkesztés: ① α, szárai b és c; csúcsa A. ② α szögfelezője, ezen $AF = s_a$. ③ F-ben merőleges AF-re: e. ④ $e \cap b = C$; $e \cap c = B$. Egyértelmű a megoldás.
3. eset: Ha $m_a > s_a$, akkor nincs megoldás.
931. A szerkesztés: ① $BD = f$, felezőpontja K. ② BD α szögű látószögköríve: k_1. ③ K középpontú, $\frac{e}{2}$ sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = \{A; C\}$. 0; 1 vagy 2 egybevágó megoldás lehet.
932. Felhasználjuk: DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CE, $\varepsilon' = 180° - \varepsilon$. A szerkesztés: ① $AE = 2a$, felezőpontja B. ② AE ε' szögű látószögköríve: k. ③ $EBC\sphericalangle = \alpha$, szára: g. ④ $k \cap g = C$. ⑤. AC felezőpontja K. ⑥ B tükörképe K-ra D. ⑦. Az eljárás ε' helyett ε szöggel újabb megoldáshoz vezethet. 2 megoldás van, ha $\varepsilon \neq 90°$, 1 megoldás van, ha $\varepsilon = 90°$.
933. **1. eset:** $\gamma < 180°$. A szerkesztés: ① f; a; $d \to ABD\triangle$. ② BD γ szögű látószögköríve: k_1. ③ A középpontú, e sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = C$. 0; 1; 2; 3 vagy 4 megoldás lehet.
2. eset: $\gamma > 180°$. A szerkesztés: ① f; a; $d \to ABD\triangle$. ② BD $(360° - \gamma)$ szögű látószögköríve: k_1. ③ A középpontú, e sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

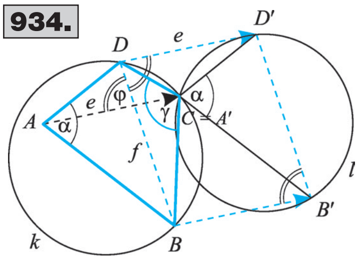
934. Induljunk ki a kész ábrából. Toljuk el DB-t az $\overrightarrow{AC}$-ral. Az eltolás miatt a $BB'D'D$ négyszög paralelogramma. A szerkesztés: ① e, f, $\varphi \Rightarrow BB'D'D$ paralelogramma. ② DB szakasz γ szögű látószögköríve $\Rightarrow k$, $D'B'$ szakasz α szögű látószögköríve $\Rightarrow l$. ③ $k \cap l = C$. ④ $C \xrightarrow{\overrightarrow{D'D}} A$. A megoldások száma a látószögkörívek közös pontjainak számától függ.

935. A 934. ábra jelöléseit használjuk. Induljunk ki a kész ábrából. $CDB\triangle$-et eltoljuk $\overrightarrow{CA}$-ral: $AD'B'\triangle$. $\Rightarrow BDD'B'$ és $BCAB'$ paralelogramma $\Rightarrow BAB'\sphericalangle = \beta$. A szerkesztés: ① e; f; $\varphi \to$ $\to BDD'B'$ paralelogramma. ② DB α szögű látószögköríve: k_1. ③ BB' β szögű látószögköríve: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = A$. ⑤ A-t eltoljuk $\overrightarrow{B'B}$-ral: C. k_1 és k_2 helyzetétől függ a megoldások száma.
936. Felhasználjuk: kerületi és középponti szögek tétele miatt $CKB\sphericalangle = 2\alpha$ és $CKA\sphericalangle = 2\beta$. A szerkesztés: ① k kör, középpontja K. ② $CKB\sphericalangle = 2\alpha$, ahol C és B a k körön van. ③ $CKA\sphericalangle = 2\beta$, az előző szög mellett, A a k körön van. $\alpha + \beta < 180°$ esetén egyértelműen megoldható.
937. Felhasználjuk: kerületi és középponti szögek tétele miatt $CKB\sphericalangle = 2\alpha$. A szerkesztés: ① a k kör K középpontja legyen csúcsa a $CKB\sphericalangle = 2\alpha$ szögnek, ahol C és B a k-n van.

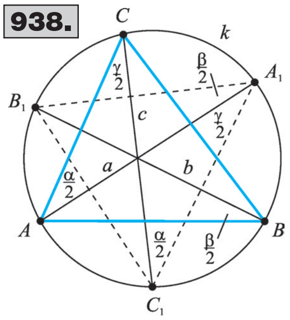
932.



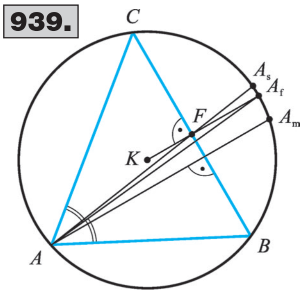
934.



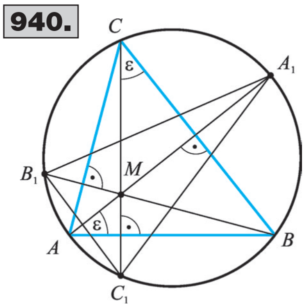
938.



939.



940.



② $(a + b) - CB = b$. ③ C középpontú, b sugarú kör: k_1. ④ $k_1 \cap k = A$. ⑤ A csak akkor megoldás, ha $CAB\sphericalangle = \alpha$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

938. Felhasználjuk: Egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlők. $AA_1B_1\sphericalangle = ABB_1\sphericalangle = \beta/2$ és $CC_1A_1\sphericalangle = CAA_1\sphericalangle = \alpha/2$ és $AA_1C_1\sphericalangle = ACC_1\sphericalangle = \gamma/2 \Rightarrow CC_1A_1\sphericalangle + C_1A_1B_1\sphericalangle = (\alpha + \beta + \gamma)/2 =$ $= 90° \Rightarrow CC_1 \perp A_1B_1$. Hasonlóan belátható, hogy $AA_1 \perp B_1C_1$ és $BB_1 \perp A_1C_1$. A szerkesztés: ① $A_1B_1C_1\triangle$ köré írt köre: k. ② C_1-ből merőleges A_1B_1-re: c. ③ $c \cap k = \{C; C_1\}$. ④ B_1-ből merőleges C_1A_1-re: b. ⑤ $b \cap k = \{B; B_1\}$. ⑥ A_1-ből merőleges C_1B_1-re: a. ⑦ $a \cap k = \{A; A_1\}$. Nincs megoldás, ha A_1; B_1; C_1 egy egyenesen van. Egyértelmű a megoldás, ha A_1; B_1; C_1 nincs egy egyenesen.

939. Felhasználjuk: $CAA_f\sphericalangle = A_fAB\sphericalangle \Rightarrow CA_sA_f$ ív egyenlő A_fA_mB ívvel $\Rightarrow A_fF$ átmegy K-n és $A_fF \perp CB$, vagyis $A_fK \parallel AA_m$. A szerkesztés: ① A_m; A_f; $A_s \rightarrow$ kör, középpontja K. ② A_m-en át párhuzamos A_fK-val, ez kimetszi a körből A-t. ③ $AA_s \cap KA_f = F$. ④ F-ben merőleges KA_f-re, ez kimetszi a körből C-t és B-t. Nincs megoldás, ha A_m; A_f; A_s egy egyenesen van. Egyértelmű a megoldás, ha A_m; A_f; A_s nincs egy egyenesen.

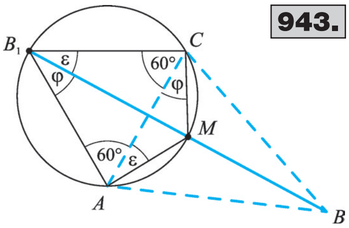
940. Felhasználjuk: $\varepsilon + \beta = 90°$; kerületi szögek tétele miatt $C_1B_1B\sphericalangle = BB_1A_1\sphericalangle = \varepsilon \Rightarrow BB_1$ szögfelezője $A_1B_1C_1\sphericalangle$-nek. Hasonlóan AA_1 szögfelezője $B_1A_1C_1\sphericalangle$-nek és CC_1 szögfelezője $A_1C_1B_1\sphericalangle$-nek. A szerkesztés: ① A_1; B_1; $C_1 \rightarrow A_1B_1C_1\triangle$ és köré írt köre. ② $A_1B_1C_1\triangle$ szögfelezői kimetszik a körből A-t, B-t és C-t. Nincs megoldás, ha A_1; B_1; C_1 egy egyenesen van. Egyértelmű a megoldás, ha A_1; B_1; C_1 nincs egy egyenesen.

941. Felhasználjuk: $APB\sphericalangle = BPC\sphericalangle = CPA\sphericalangle \Rightarrow$ mindhárom 120°. A szerkesztés: ① AB 120°-os látóköre. ② BC 120°-os látóköre. ③ a két látókörnek a háromszög belsejébe eső közös pontja a megfelelő pont. Egyértelmű a megoldás.

942. Az $ABC\triangle$ AC oldala a B_1-ből 60° alatt látszik. $\Rightarrow$ kiegészítő ív pontjaiból 120° alatt látszik. Hasonlóan: az $A_1BC\triangle$ köré írt körének az $ABC\triangle$ belsejébe eső ívén található pontokból BC 120° alatt látszik. $\Rightarrow A$ két 120°-os ív közös pontjából AB is 120° alatt látszik. $\Rightarrow$ A közös pont rajta van AB 120°-os látószögkörívén, aminek kiegészítő ívéről 60°-os szögben látszik AB. $\Rightarrow$ Az $ABC_1\triangle$ köré írt köre is átmegy a közös ponton.

943. $ACB_1\triangle$ szabályos, M az $AB_1C\triangle$ köré írt körnek és BB_1-nek a metszéspontja. Kerületi szögek tétele miatt az egyformán jelölt szögek egyenlők. $\varepsilon + \varphi = 60° \Rightarrow \underline{CMA\sphericalangle = 120°}$. $CMB\sphericalangle$ külső szöge $MCB_1\triangle$-nek $\Rightarrow \underline{CMB\sphericalangle} = \varepsilon + 60° + \varphi = \underline{120°}$. $\underline{AMB\sphericalangle} =$ $= 360° - CMA\sphericalangle - CMB\sphericalangle = \underline{120°}$.

943.



Az aláhúzottakból következik, hogy M-ből 120° alatt látszik AB; BC és $CA \Rightarrow M$ az ABC izogonális pontja. Hasonló eredményt kapunk AA_1 és CC_1 esetén is, vagyis AA_1; BB_1 és CC_1 is áthalad az $ABC\triangle$ izogonális pontján, tehát ez a metszéspontjuk. Megjegyzés: $AMC\sphericalangle = 120°$ forgatással is bizonyítható, mivel az AA_1 szakaszt B körül $+60°$-kal elforgatva C_1C szakaszt kapjuk, ezért AA_1 és CC_1 egyenesek szöge 60°.

I

944. Legyen P tetszőleges belső pontja az $ABC\triangle$-nek. A körül 60°-kal elforgatjuk az $APC\triangle$-et $\Rightarrow$ $\Rightarrow AP'C'\triangle$. $AP = AP'$ és $PAP'\sphericalangle = 60° \Rightarrow PP' = AP$, valamint $AC = AC'$ és $CP = C'P' \Rightarrow$ $\Rightarrow AP + BP + CP = PP' + BP + C'P' =$ a $BPP'C'$ töröttvonal hossza. Ez akkor a lehető legkisebb, ha B; P; P'; C' egy egyenesen van. $\Rightarrow BPP'\sphericalangle = 180°$, vagyis $BPA\sphericalangle + APP'\sphericalangle = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{BPA\sphericalangle = 120°}$, valamint $PP'C'\sphericalangle = 180°$, vagyis $PP'A\sphericalangle + AP'C'\sphericalangle = 180° \Rightarrow AP'C'\sphericalangle = 120° \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{APC\sphericalangle = 120°}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $BPC\sphericalangle = 120°$, vagyis P az $ABC\triangle$ izogonális pontja.

945. Legyenek K_1 és K_2 a körközéppontok. **1. eset:** a két kör kívülről érinti egymást. K_1K_2 áthalad E-n, ezért $K_1EA\sphericalangle = K_2EB\sphericalangle$ (csúcsszögek) $\Rightarrow AK_1E$ és BK_2E egyenlő szárú háromszögek szárszöge is egyenlő, és ezek pont a húrokhoz tartozó középponti szögek.
2. eset: az egyik kör belülről érinti a másikat. K_1K_2 áthalad E-n, ezért $EK_2B\triangle$ és $EK_1A\triangle$ egyenlő szárú és az alapon fekvő szögük egyenlő $\Rightarrow$ A szárak szöge is egyenlő és ez pont a húrokhoz tartozó középponti szög.

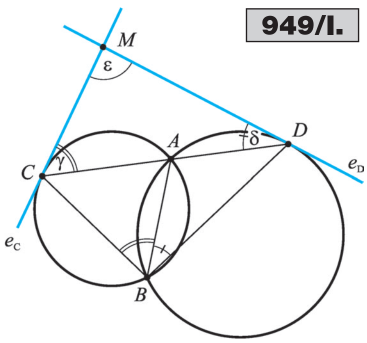
946. Legyenek K_1 és K_2 a körközéppontok. K_1K_2 áthalad E-n $\Rightarrow BEK_2\sphericalangle = AEK_1\sphericalangle \Rightarrow K_1AE\sphericalangle =$ $= EBK_2\sphericalangle \Rightarrow AK_1 \parallel K_2B \Rightarrow e_A \parallel e_B$, mert az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.

947. **1. eset:** C pont nincs a másik kör belsejében, de $C \neq A$. $ACB\sphericalangle = \gamma$ a szelő bármely helyzetében, mert AB ívhez tartozó kerületi szög az egyik körben. $ADB\sphericalangle = \delta$ a szelő bármely helyzetében, mert AB ívhez tartozó kerületi szög a másik körben. $CBD\triangle$-ben $CBD\sphericalangle =$ $= 180° - \gamma - \delta =$ állandó.
2. eset: C pont a másik kör belsejében van. $ACB\sphericalangle = 180° - \gamma \Rightarrow BCD\sphericalangle = \gamma \Rightarrow CBD\sphericalangle =$ $= 180° - \gamma - \delta =$ állandó,
3. eset: C pont azonos A-val. $BAD\sphericalangle = \gamma$, mert érintő szárú kerületi szög $\Rightarrow CBD\sphericalangle = 180° - \gamma -$ $- \delta =$ állandó.

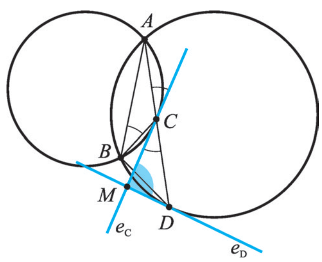
948. **1. eset:** P pont nincs az l kör belsejében. A 947. feladat alapján $PBC\sphericalangle$ állandó (független P helyétől), ezért $CBD\sphericalangle$ is állandó. Adott körben ugyanakkora kerületi szögekhez pedig ugyanakkora húrok tartoznak. $\Rightarrow CD$ hossza független P helyétől.
2. eset: P pont az l kör belsejében van. A 947. feladat alapján $PBC\sphericalangle$ állandó $\Rightarrow DBC\sphericalangle$ állandó. Adott körben az egyenlő kerületi szögekhez egyenlő húrok tartoznak. $\Rightarrow CD$ hossza független P helyétől.

949. **1. eset:** C és D az AB által határolt különböző félsíkokban vannak. $MCA\sphericalangle$ érintő szárú kerületi szög ugyanahhoz az ívhez tartozik, mint $ABC\sphericalangle$ kerületi szög $\Rightarrow MCA\sphericalangle = ABC\sphericalangle$. Hasonlóan belátható, hogy $MDA\sphericalangle = ABD\sphericalangle$. A 947. feladatból tudjuk, hogy $CBD\sphericalangle$ állandó, vagyis $(\gamma + \delta)$ állandó, tehát $\varepsilon = 180° - (\gamma + \delta)$ is állandó, azaz független CD helyzetétől.
2. eset: C és D az AB által határolt közös félsíkban vannak. $MCA\sphericalangle$ érintőszárú kerületi szög, az $ABC\sphericalangle$-höz tartozó körív kiegészítő ívéhez tartozik $\Rightarrow MCA\sphericalangle = 180° - ABC\sphericalangle$. Hasonlóan: $MDA\sphericalangle = 180° - ABD\sphericalangle$. A 947. feladatból tudjuk, hogy $CBD\sphericalangle$ állandó.
$CBD\sphericalangle = ABD\sphericalangle - ABC\sphericalangle = (180° - ABC\sphericalangle) - (180° - ABD\sphericalangle) = MCA\sphericalangle - MDA\sphericalangle = DMC\sphericalangle$ (külső szög miatt).

949/I.

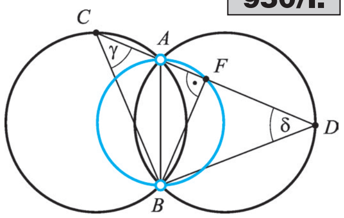


949/II.

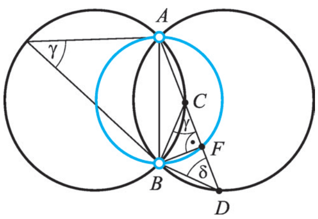


I

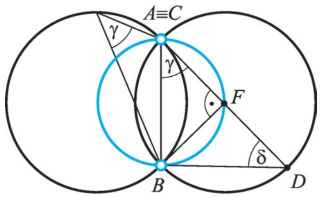
950/I.



950/II.



950/III.



950. **1. eset:** $C \neq A$. γ és δ az AB-hez tartozó kerületi szög. Mivel a körök egyenlő sugarúak, $\gamma = \delta \Rightarrow CB = BD \Rightarrow BF$ a $CBD\triangle$ alaphoz tartozó magassága $\Rightarrow BF \perp AF \Rightarrow F$ az AB szakasz Thalész körén van rajta. Az A körül forgatott egyenesen lévő felezőpontokkal az AB Thalész körét kapjuk meg. A Thalész-kör minden pontja megfelel. **2. eset:** $C \equiv A \Rightarrow CD$ érintő. $BAD\sphericalangle = BDA\sphericalangle$, mert egyenlő sugarú körökben ugyanakkora ívhez tartozó kerületi szögek $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB = BD \Rightarrow ABD\triangle$-nek BF a magassága $\Rightarrow BF \perp AD \Rightarrow F$ rajta van AB Thalész körén. Az A körül forgatott egyenesen lévő felezőpontokkal az AB Thalész körét kapjuk meg. A Thalész-kör minden pontja megfelel.

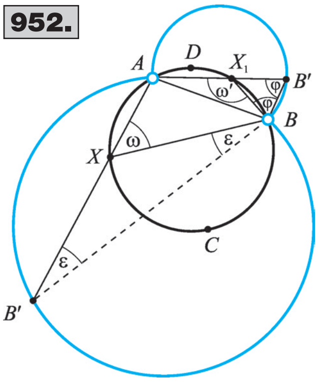
951. Az AC felezőmerőlegesének minden AC-n kívüli pontja megfelelő.

952. $XB' = XB \Rightarrow XB'B\sphericalangle = XBB'\sphericalangle = \varepsilon$. $AXB\sphericalangle = \omega$ külső szöge az $XB'B$ $\triangle$-nek, ezért $\varepsilon = \omega/2 =$ állandó, mert ω állandó, hiszen AB ívhez tartozó kerületi szög $\Rightarrow$ Amikor $X \in ACB$ ív, akkor az AB $\omega/2$ szögű látószögkörívén mozog B', az X-szel közös félsíkban. Amikor $X_1 \in ADB$ ív, akkor B' az AB $\varphi = \omega'/2 = (180° - \omega)/2 = 90° - \omega/2$ szögű látószögkörívén mozog, az X_1-et tartalmazó félsíkban.

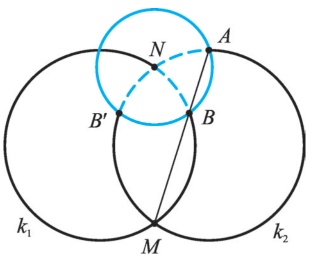
953. CD átmérő, A és B a két adott pont. Ha a CD átmérő valamelyik végpontja A vagy B, akkor nem jön létre az egyik összekötő egyenes. **1. eset:** AB átmérő. Thalész tétele miatt $ADBC$ téglalap $\Rightarrow$ Az összekötő vonalak nem metszik egymást.
2. eset: CD nem választja el A-t és B-t és AB nem átmérő. Legyen $DB \cap AC = M_2$ és $DA \cap CB =$ $= M_1$. $DAM_2\sphericalangle = CBM_2\sphericalangle = 90°$ Thalész tétele miatt. $ACB\sphericalangle = \gamma$ állandó, mert AB ívhez tartozó kerületi szög. $AM_2B\sphericalangle$ külső szöge $M_2BC\triangle$-nek $\Rightarrow AM_2B\sphericalangle = 90° + \gamma$. AM_2BM_1 négyszög húrnégyszög $\Rightarrow AM_1B\sphericalangle = 180° - AM_2B\sphericalangle = 90° - \gamma \Rightarrow$ A; B; M_1; M_2 egy körön van, az AB-nek C-vel ellentétes félsíkban levő $(90° - \gamma)$ szögű látószögkörívén és annak kiegészítő ívén.
3. eset: CD elválasztja A-t és B-t és AB nem átmérő. $CAD\sphericalangle = DBC\sphericalangle = 90°$ Thalész tétele miatt. $M_2BC\triangle \Rightarrow CM_2B\sphericalangle = 90° - \gamma$, valamint $M_1AC\triangle \Rightarrow CM_1A\sphericalangle = 90° - \gamma \Rightarrow A$; B; M_1; M_2 egy körön van, az AB-nek C-vel ellentétes félsíkban levő $(90° - \gamma)$ szögű látószögkörívén.

954. A; B; B' egy körön vannak, aminek N a középpontja $\Rightarrow NA$; NB; NB' húrok, illetve ívek egyenlő hosszúak. $B'MN\sphericalangle = NMA\sphericalangle$, mert a k_2 körben egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek.

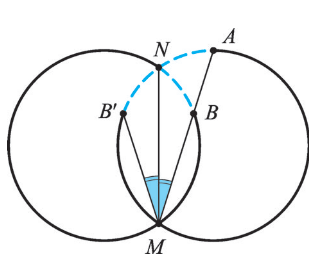
952.



954/I.

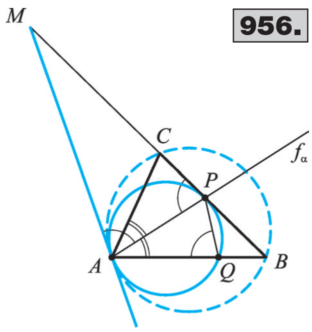


954/II.

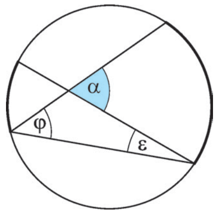


I

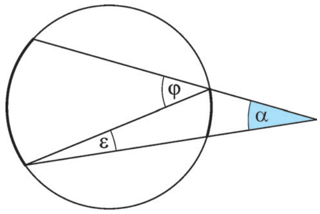
956.



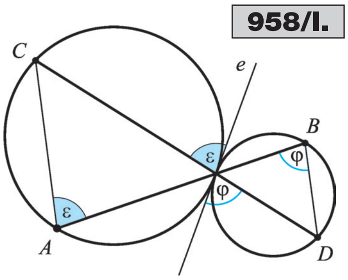
957/I.



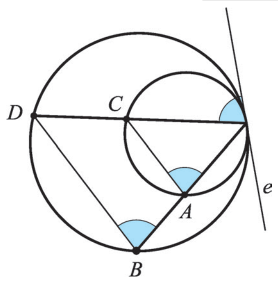
957/II.



958/I.



958/II.



$B'MN\sphericalangle = NMB\sphericalangle$, mert egyenlő sugarú körökben egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek. $\Rightarrow$ MB és MA egy egyenesbe esik $\Rightarrow$ M; A és B egy egyenesen van.

955. Legyen az A-ból induló szögfelezőnek BC-vel való metszéspontja P. Jelöljük az A pontbeli érintőnek a BC egyenessel való metszéspontját M-mel. AC ívhez tartozó kerületi szög β és érintőszárú kerületi szög $CAM\sphericalangle \Rightarrow CAM\sphericalangle = \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\underline{MAP\sphericalangle = \beta + \alpha/2}$. $MPA\sphericalangle$ külső szöge az $ABP\triangle$-nek $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\underline{MPA\sphericalangle = \beta + \alpha/2}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $AM = PM$, az $AMP\triangle$ egyenlő szárú. Megjegyzés: Ha $AC = AB$, akkor $e \parallel BC$ miatt nem jön létre háromszög.

956. A 955. feladat miatt $MAP\sphericalangle = MPA\sphericalangle$ (MA érintője az ABC $\triangle$ köré írható körnek). $MPA\sphericalangle \equiv CPA\sphericalangle$ érintőszárú kerületi szög a kis körben $\Rightarrow$ $CPA\sphericalangle = PQA\sphericalangle \Rightarrow PQA\sphericalangle =$ $= MAP\sphericalangle$ és AP a $PQA\sphericalangle$ ívéhez tartozó húr $\Rightarrow$ $MAP\sphericalangle$ érintőszárú kerületi szöge a kis körnek $\Rightarrow$ MA érintője mindkét körnek $\Rightarrow$ <u>a két kör érinti egymást</u>. Ha $AC = AB$, akkor a két körnek közös az A-ra illeszkedő átmérőegyenese, ezért A-ban érintik egymást.

957. Külső szög miatt: $\alpha = \varphi + \varepsilon$ (957/I. ábra). Külső szög miatt: $\varphi = \alpha + + \varepsilon \Rightarrow \alpha = \varphi - \varepsilon$ (957/II. ábra).

958. e: közös érintő. *a)* Az egyformán jelölt szögek egyenlők, mert azonos ívhez tartozó kerületi, illetve érintőszárú kerületi szögek. $\varepsilon = \varphi$, mert az érintőszárú kerületi szögek csúcsszögek $\Rightarrow CAB\sphericalangle = ABD\sphericalangle \Rightarrow$ $\Rightarrow AC \parallel BD$.

b) Az egyformán jelölt szögek egyenlők, mert azonos ívhez tartozó kerületi, illetve érintőszárú kerületi szögek.

959. $BEA\sphericalangle = BEP\sphericalangle - AEP\sphericalangle = BCE\sphericalangle - ADE\sphericalangle = CED\sphericalangle$

kerületi szögek — külső szög

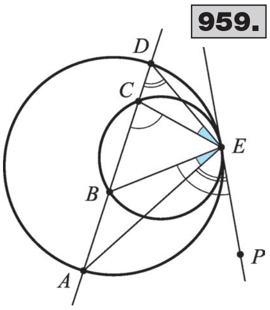
960. $\underline{\underline{PEA\sphericalangle}} = PET\sphericalangle - AET\sphericalangle = PQE\sphericalangle - ABE\sphericalangle = BPQ\sphericalangle = \underline{\underline{PEO\sphericalangle}}$

kerületi szögek — külső szög — kerületi szög

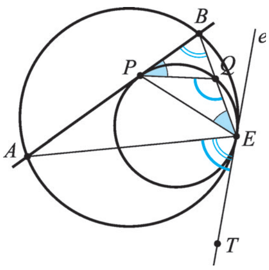
961. **1. eset:** $AC \neq AB$. Külső szög miatt: $\gamma = \varepsilon + \delta \Rightarrow \varepsilon = \gamma - \delta$. Kerületi szög miatt: $\delta = \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow \varepsilon = \gamma - \beta$. **2. eset:** $AC = AB$. $e \parallel BC \Rightarrow \sphericalangle(e; BC) = 0°$.

962. A szerkesztés: ① AP 45°-os látószögköríve: k_1. ② PQ Thalész köre: k_2. ③ $k_1 \cap k_2 = C$. ④ AC felezőmerőlegese: f_{AC}. ⑤ a felezőmerőlegesen $AC/2$ hosszú szakaszt felmérni mindkét irányban $\rightarrow$ B és D. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

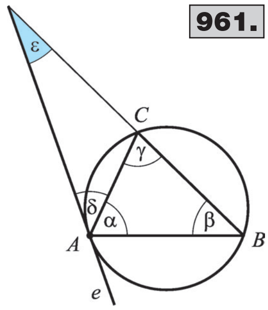
959.



960.



961.



963. Egy segédábrán olyan $PQR_1\triangle$-et szerkesztünk, melyre $PQ = a$, $PR_1Q\sphericalangle = \alpha$ és a PQ oldalhoz tartozó magasság d. A szerkesztés: ① α egyik szárán $RB = R_1Q \Rightarrow B$. ② α másik szárán $RA = R_1P \Rightarrow A$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

964. Legyen a két adott szakasz $AB = a$ és $BC = b$. A feladat csak akkor oldható meg, ha $\alpha + \beta < 180°$. A szerkesztés: ① AB α szögű látószögköríve: k_1. ② BC β szögű látószögköríve: k_2. ③ $k_1 \cap k_2 = P_1 \Rightarrow P_1A = PE$, $P_1B = PF$, amit az adott félegyeneseken felhasználunk. ④ e-n $PE = P_1A$. ⑤ f-en $PF = P_1B$. ⑥ EF egyenes. 0 vagy 1 megoldás van.

965. A szerkesztés: ① Egy segédábrán olyan $A_1B_1P_1\triangle$-et szerkesztünk, amelynek A_1B_1 oldala a kör átmérőjével, ehhez tartozó súlyvonala KP-vel, $A_1B_1P_1\sphericalangle$-e ε-nal egyenlő. ② P középpontú, P_1A_1 sugarú kör és k metszéspontja: A. ③ $e(A; K) \cap k = B$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

966. **1. eset:** C az AB által létrehozott *a)* íven mozog. γ állandó, mert mindig ugyanahhoz az ívhez tartozik $\Rightarrow$ $\alpha + \beta = 180° - \gamma$ szintén állandó $\Rightarrow$ $\alpha/2 + \beta/2 = 90° - \gamma/2$ is állandó $\Rightarrow$ $\Rightarrow \varepsilon = 180° - (\alpha/2 + \beta/2) = 180° - (90° - \gamma/2) = 90° + \gamma/2$ is állandó $\Rightarrow$ K rajta van az AB szakasz $(90° + \gamma/2)$ szögű látószögkörívén, az AB szakasz *a)* ív felé eső oldalán.

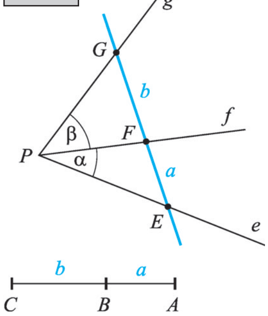
2. eset: C a kiegészítő *b)* íven mozog, hasonlóan az első esethez: $\varepsilon' = 90° + \gamma'/2$ és $\gamma' = 180° - \gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow \varepsilon' = 180° - \gamma/2 \Rightarrow K$ rajta van az AB szakasz $(90° - \gamma/2)$ szögű látószögkörívén, az AB szakasz *b)* ív felé eső oldalán.

967. $AKB\sphericalangle = 180° - (\alpha/2 + \beta/2) = 180° - \left(\dfrac{180° - \gamma}{2}\right) = 90° + \gamma/2.$

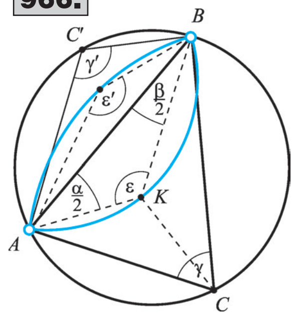
A szerkesztés: ① $AB = c$. ② AB $(90° + \gamma/2)$ szögű látószögköríve: k. ③ AB-vel párhuzamos r távolságra: e. ④ $e \cap k = K$. ⑤ $BAK\sphericalangle$-et AK másik oldalára is felmérni. ⑥ $ABK\sphericalangle$-et BK másik oldalára is felmérni. ⑦ A két új szögszár metszéspontja C. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

968. AB az adott szakasszal egyenlő: $AB = c$. Felhasználjuk: Az $ABC\triangle$-nek az adott k_c kör a c oldalhoz hozzáírt köre. Legyen az $ABC\triangle$ beírt köre k_0. A k_0 kör E_1 és a k_c kör E_2 érintési pontjának távolsága szintén c. O_0 és O_c rajta van az adott szög szögfelezőjén. A és B csúcsok rajta vannak O_0O_c Thalész körén (belső és külső szögfelezők).

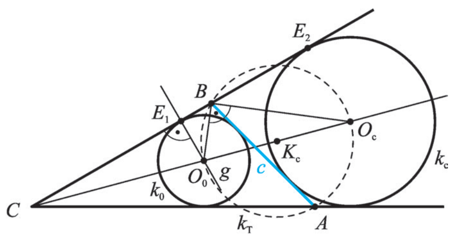
964.



966.

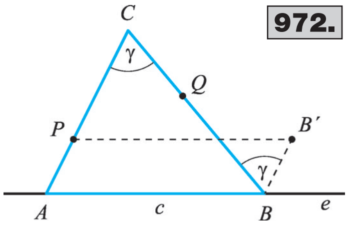


968.



I

972.



A szerkesztés: ① k_c-nek az egyik szögszárral való érintési pontja E_2. ② $E_1 \in CE_2$ és $E_1E_2 = c$. ③ E_1-ben merőleges CE_2-re: g. ④ $g \cap CO_c = O_0$. ⑤ O_0O_c Thalész köre: k_T. ⑥ k_T-nek a szögszárakkal való metszéspontjaiból a keresett szakasz megrajzolható. Megjegyzés: Ha a szerkesztés második lépésében a c távolságot E_2-ből a másik irányba mérjük, akkor k_c az $ABC\triangle$ beírt köre lesz.

969. *a)* AF ív egyenlő FB ívvel, ezért $ACF\sphericalangle = FCB\sphericalangle \Rightarrow F$ rajta van CO_0 szögfelezőn.
$ACF\sphericalangle = ABF\sphericalangle = \gamma/2 \Rightarrow O_0BF\sphericalangle = \gamma/2 + \beta/2$ és $BO_0F\sphericalangle$ külső szög $\Rightarrow BO_0F\sphericalangle = \beta/2 + \gamma/2$.
$BCF\sphericalangle = BAF\sphericalangle = \gamma/2 \Rightarrow O_0AF\sphericalangle = \gamma/2 + \alpha/2$ és $AO_0F\sphericalangle$ külső szög $\Rightarrow AO_0F\sphericalangle = \alpha/2 + \gamma/2$.
A fentiekből következik, hogy $O_0F = B_0F$ és $O_0F = AF \Rightarrow \underline{\underline{AF = O_0F = BF}}$.
b) $FBO_c\sphericalangle = \beta'/2 - \gamma/2$ és $FO_cB\sphericalangle = \beta'/2 - \gamma/2$ külső szög miatt. $FAO_c\sphericalangle = \alpha'/2 - \gamma/2$ és $AO_cF\sphericalangle = \alpha'/2 - \gamma/2$ külső szög miatt. A fentiekből következik, hogy $FB = FO_c$ és $FA = FO_c \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{FA = FO_c = FB}}$.

970. Jelöljük a c oldalhoz hozzáírt kör középpontját O_c-vel, a körülírt kör és a belső szögfelező második metszéspontját M-mel. O_0 és O_c rajta van γ szögfelezőjén $\Rightarrow AM = MB$. A 969. *a)* feladat miatt $AM = O_0M$. A 969. *b)* feladat miatt $AM = O_cM$. A fentiekből következik, hogy M felezi a O_0O_c szakaszt.

971. Felhasználjuk: 969. *a)* feladat szerint $AF = FL$ és 969. *b)* feladat szerint $AF = FM \Rightarrow$
$\Rightarrow FM = FL$. A szerkesztés: ① LM szakasz felezőpontja: F. ② K középpontú, KF sugarú kör: k_1. ③ F középpontú, FL sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = \{A; B\}$. ⑤ $e(L; M) \cap k_1 = \{F; C\}$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

972. C-ből γ szög alatt látszik PQ is, AB is. PB' párhuzamos és egyenlő AB-vel $\Rightarrow QBB'\sphericalangle = \gamma$. A szerkesztés: ① P-ben párhuzamos e-vel, ezen $PB' = c$. ② QB' γ szögű látószögköríve: k. ③ $k \cap e = B$. ④ PB'-t eltoljuk $\overrightarrow{B'B}$-ral: AB. ⑤ $e(A; P) \cap e(B; Q) = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

Húrnégyszögek, érintőnégyszögek

A **973; 974.** és **975.** feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

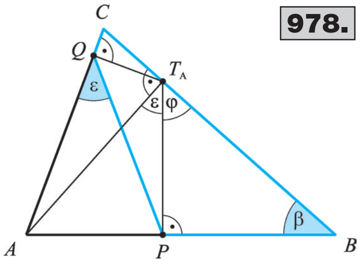
976. Legyen a szomszédos szögfelezők metszéspontja rendre Q, R, S, P. P-nél lévő szög: $180° - \alpha/2 - \delta/2$ és R-nél lévő szög: $180° - \beta/2 - \gamma/2$.
A két szög összege: $(180° - \alpha/2 - \delta/2) + (180° - \beta/2 - \gamma/2) = 360° - (\alpha + \delta + \beta + \gamma)/2 = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow PQRS$ húrnégyszög.

977. Jelöljük T_A-val az A-ból induló, T_B-vel a B-ből induló magasság talppontját. $AT_AB\sphericalangle =$
$= AT_BB\sphericalangle = 90° \Rightarrow A$; B; T_A; T_B egy körön van Thalész tétele miatt, az AB átmérőjű körön.

978. P és Q rajta van AT_A Thalész körén $\Rightarrow AQP\sphericalangle = AT_AP\sphericalangle$. $\varepsilon + \varphi = 90° = \varphi + \beta \Rightarrow \varepsilon = \beta$. $CQP\sphericalangle = 180° - \varepsilon = 180° - \beta$, valamint $CQP\sphericalangle + PBC\sphericalangle = 180° \Rightarrow PBCQ$ húrnégyszög $\Rightarrow P$; B; C és Q egy körön helyezkedik el.

979. Jelöljük M-mel a magasságpontot, T_A-val, T_C-vel a magasságtalppontokat. Tompaszögű és hegyesszögű $\triangle$ esetén: T_A-nál és T_C-nél derékszög van, ezért Thalész tétele miatt T_A és T_C rajta van az MB átmérőjű körön. C derékszögű csúccsal rendelkező $\triangle$ esetén: T_C rajta van BC Thalész körén. B derékszögű csúccsal rendelkező $\triangle$ esetén: $M \equiv T_A \equiv T_C \equiv B$, ezért egy körön is vannak.

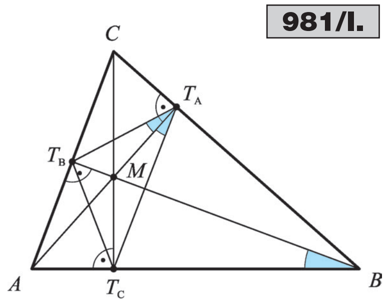
978.



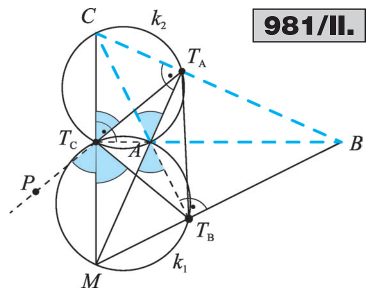
980. T_A és T_B rajta van AB Thalész körén, ezért ABT_AT_B húrnégyszög, aminek $T_AT_BC\sphericalangle$ külső szöge, egyenlő β-val. Hasonlóan látható be az állítás a másik két oldalra is.

981. **1. eset:** $ABC\triangle$ hegyesszögű. A; B; T_A; T_B Thalész tétele miatt egy körön vannak $\Rightarrow$ $\underline{ABT_B\sphericalangle = AT_AT_B\sphericalangle}$.

981/I.



981/II.



M; T_C; B; T_A Thalész tétele miatt egy körön vannak $\Rightarrow \underline{T_C BM\sphericalangle = T_C T_A M\sphericalangle}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $AT_AT_C\sphericalangle = AT_AT_B\sphericalangle$, vagyis T_AM egyenes szögfelezője a $T_AT_BT_C\triangle$-nek. Hasonlóan belátható a másik két magasságról is, hogy szögfelező.

2. eset: $ABC\triangle$ tompaszögű. Az első esethez hasonlóan belátható, hogy MT_A szögfelező. M; A; T_B; T_C Thalész tétele miatt egy körön vannak $\Rightarrow MT_CT_B\sphericalangle = MAT_B\sphericalangle$, mert kerületi szögek k_1-ben. $\underline{MAT_B\sphericalangle = T_A AC\sphericalangle}$, mert csúcsszögek. C; A; T_A; T_C Thalész tétele miatt egy körön vannak $\Rightarrow CT_CT_A\sphericalangle = CAT_A\sphericalangle$, mert kerületi szögek k_2-ben. $\underline{T_A T_C C\sphericalangle = MT_C P\sphericalangle}$, mert csúcsszögek. Az aláhúzottakból következik, hogy $MT_CT_B\sphericalangle = MT_CP\sphericalangle$. $\Rightarrow MT_C$ a $T_AT_BT_C\triangle$ külső szögének szögfelezője. Hasonlóan látható be az állítás a harmadik magasságra is. Megjegyzés: Derékszögű háromszög esetén két magasságtalppont megegyezik a derékszögű csúccsal, ezért nem jön létre talpponti háromszög.

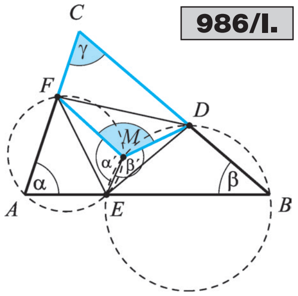
982. A 981. feladatban láttuk, hogy a talpponti háromszög külső vagy belső szögfelezői a háromszög magasságvonalai. A szerkesztés: ① $T_AT_BT_C\triangle$ belső szögfelezői, metszéspontjuk D. ② Ezekre a szögfelezőkre a szögek csúcsában merőlegest állítunk → a talpponti háromszög külső szögfelezői, metszéspontjaik A; B; C. ③ $ABC\triangle$, $ADB\triangle$, $BDC\triangle$, $CDA\triangle$ megoldása a feladatnak, mert $T_AT_BT_C\triangle$ mindegyiknek talpponti háromszöge. 4 megoldás van.

983. Jelölje T_A, T_B és T_C a magasságtalppontokat. C; A; T_A; T_C Thalész tétele miatt egy körön vannak $\Rightarrow ACT_C\sphericalangle = AT_AT_C\sphericalangle = \gamma_1$. A; B; T_A; T_B Thalész tétele miatt egy körön vannak $\Rightarrow ABT_B\sphericalangle = AT_AT_B\sphericalangle = \beta_1$. $AT_CC\triangle$ és $AT_BB\triangle$ hasonlók $\Rightarrow \gamma_1 = \beta_1 = 90° - \alpha$. $T_BT_AT_C\sphericalangle = \gamma_1 + \beta_1 = \underline{\underline{180° - 2\alpha}}$. Hasonlóan belátható, hogy $T_AT_BT_C\sphericalangle = 180° - 2\beta$ és $T_BT_CT_A\sphericalangle = 180° - 2\gamma$.

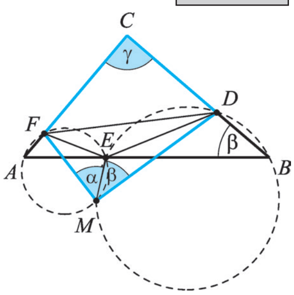
A **984.** és **985.** feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

986. Legyen M az $AEF\triangle$ köré írt kör és az $EBD\triangle$ köré írt kör E-től különböző metszéspontja.
1. eset: M az $ABC\triangle$-ben van. $AEMF$ húrnégyszög $\Rightarrow \alpha' = 180° - \alpha$ és $BEMD$ húrnégyszög $\Rightarrow \beta' = 180° - \beta$. $\Rightarrow FMD\sphericalangle = 360° - \alpha' - \beta' = 180° - \gamma \Rightarrow FMD\sphericalangle + FCD\sphericalangle = 180° \Rightarrow CFMD$ is húrnégyszög, köré írt köre azonos $FCD\triangle$ köré írt körével ⇒ mindegyik átmegy M-en.

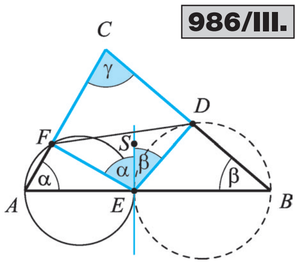
986/I.



986/II.

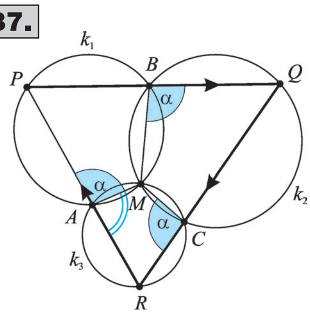


986/III.

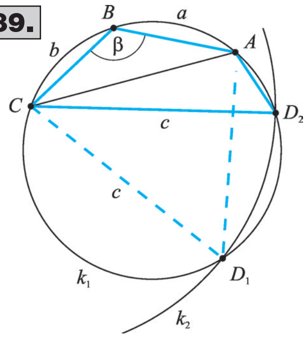


I

987.



989.



2. eset: M az $ABC\triangle$-ön kívül van. $AMEF$ húrnégyszög $\Rightarrow$ $FME\sphericalangle = FAE\sphericalangle = \alpha$ és $BMED$ húrnégyszög $\Rightarrow EMD\sphericalangle = EBD\sphericalangle = \beta$. Az $MDCF$ négyszögben $AMD\sphericalangle + ACD\sphericalangle = \alpha + \beta + \gamma = 180°$ $\Rightarrow$ $MDCF$ húrnégyszög, körülírt köre megegyezik $CFD\triangle$ körülírt körével $\Rightarrow$ mindhárom kör áthalad M-en.

3. eset: $AEF\triangle$ és $EBD\triangle$ köré írt köre érinti egymást. SE a két kör közös érintője. $SEF\sphericalangle = FAE\sphericalangle = \alpha$, mert azonos ívhez tartozó kerületi szögek. $SED\sphericalangle = DBE\sphericalangle = \beta$, mert azonos ívhez tartozó kerületi szögek. $EDCF$ négyszögben $FED\sphericalangle + FCD\sphericalangle = \alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow EDCF$ húrnégyszög, körülírt köre azonos $CFD\triangle$ köré írt körével $\Rightarrow$ mindhárom kör átmegy E-n.

987. $QBM\sphericalangle$ az $AMBP$ húrnégyszög külső szöge $\Rightarrow QBM\sphericalangle = \alpha$. $RCM\sphericalangle$ a $BQCM$ húrnégyszög külső szöge $\Rightarrow$ $RCM\sphericalangle = \alpha$. $ARCM$ húrnégyszög $\Rightarrow$ $MAR\sphericalangle = 180° - \alpha$. $RAP\sphericalangle = RAM\sphericalangle + MAP\sphericalangle = 180° - \alpha + \alpha = 180° \Rightarrow R; A; P$ egy egyenesen van.

988. A szerkesztés: ① $a; b; e \to ABC\triangle$. ② $ABC\triangle$ köré írható kör: k_1. ③ C középpontú, c sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = \{D_1; D_2\}$. ⑤ az a D_i a megfelelő, amit AC elválaszt B-től. 0 vagy 1 megoldás lehet.

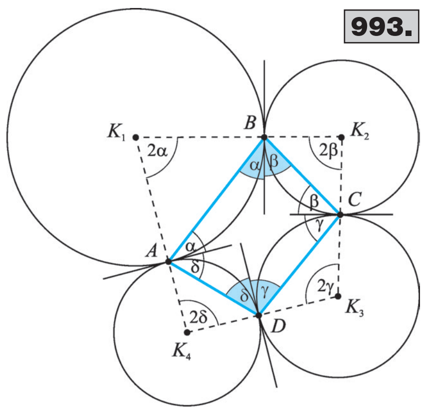
989. A szerkesztés:① $a; b; \beta \to ABC\triangle$. ② $ABC\triangle$ köré írt köre: k_1. ③ C középpontú, c sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = D_i$. ⑤ az a D_i a megfelelő, amit AC elválaszt B-től. 0 vagy 1 megoldás lehet.

A **990.**, **991.** és **992.** feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

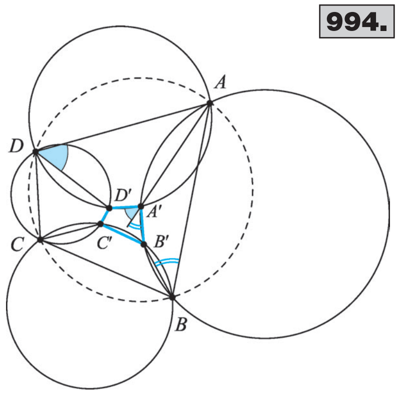
993. Megrajzoltuk az érintkező körök közös belső érintőit. Érintőszárú kerületi szögek és középponti szögek közötti kapcsolatokat az ábrán jelöltük. $K_1K_2K_3K_4$ négyszögben $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360° \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$. $BAD\sphericalangle + DCB\sphericalangle = (\alpha + \delta) + (\beta + \gamma) = 180° \Rightarrow ABCD$ húrnégyszög $\Rightarrow A; B; C; D$ egy körön van.

994. Két kör közös húregyenese a belső $A'B'C'D'$ négyszög szögét két olyan részre bontja, amely egy-egy húrnégyszög külső szöge. $B'A'D'\sphericalangle = ADD'\sphericalangle + ABB'\sphericalangle$ és $B'C'D'\sphericalangle =$

993.

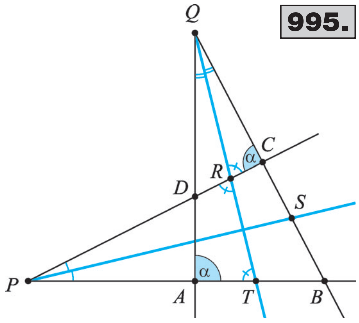


994.

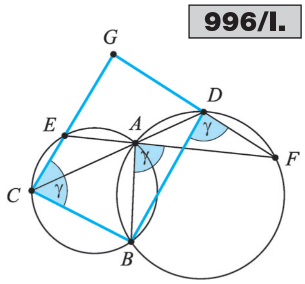


I

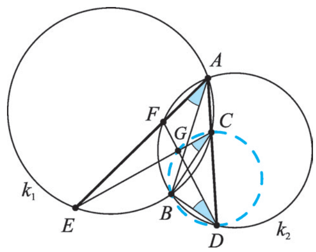
995.



996/I.

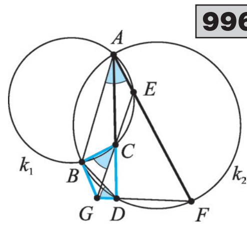


996/II.



$= CBB'\sphericalangle + CDD'\sphericalangle. \Rightarrow B'A'D'\sphericalangle + B'C'D'\sphericalangle = ADC\sphericalangle + ABC\sphericalangle =$ $= 180°$, mert $ABCD$ húrnégyszög. $\Rightarrow A'B'C'D'$ húrnégyszög $\Rightarrow$ $\Rightarrow A'; B'; C'; D'$ egy körön van.

996/III.



995. QR szögfelező $\Rightarrow DQR\sphericalangle = RQC\sphericalangle$, valamint $DAB\sphericalangle =$ $= RCQ\sphericalangle \Rightarrow QCR\triangle$-nek és $QAT\triangle$-nek két szöge egyenlő, tehát a harmadik is: $ATR\sphericalangle = CRQ\sphericalangle$. $CRQ\sphericalangle = DRT\sphericalangle$, mert csúcsszögek $\Rightarrow ATR\sphericalangle = DRT\sphericalangle \Rightarrow TRP\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow$ a szárszög felezője merőleges az alapra $\Rightarrow PS \perp QT$.

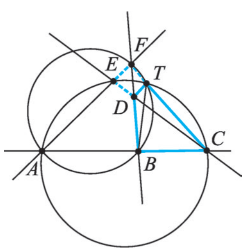
996. A szelők helyzetétől függően a kerületi szögek tétele, illetve a húrnégyszögek külső szögére vonatkozó tétel felhasználásával bizonyítható az állítás. A 996/I. ábrán $ECB\sphericalangle = FAB\sphericalangle = FDB\sphericalangle \Rightarrow CBDG$ húrnégyszög $\Rightarrow C; B; D; G$ egy körön van. A 996/II. ábrán $EAB\sphericalangle = ECB\sphericalangle$ és $FAB\sphericalangle = FDB\sphericalangle \Rightarrow GCB\sphericalangle = GDB\sphericalangle \Rightarrow GBDC$ húrnégyszög $\Rightarrow G; B; D; C$ egy körön van. A 996/III. ábrán $GDB\sphericalangle = BAF\sphericalangle$ és $BCG\sphericalangle = BAE\sphericalangle \Rightarrow$ $\Rightarrow BCG\sphericalangle = BDG\sphericalangle \Rightarrow BCDG$ húrnégyszög $\Rightarrow B; C; D; G$ egy körön van.

997. Tekintsünk két háromszög köré írt kört: $AEC\triangle$-ét és $ABF\triangle$-ét. Metszéspontjuk A és T. Legyen a 996. feladat szerint a két szelő AE és AB. Legyenek a szelők második metszéspontjai F és C, valamint $EC \cap BF = D$. A 996. feladatból $\Rightarrow EDTF$ és $BDTC$ is húrnégyszög $\Rightarrow EDF\triangle$ köré írt kör és $BCD\triangle$ köré írt kör is átmegy T-n.

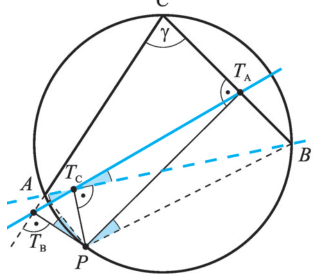
998. $CT_BP\sphericalangle = PT_AC\sphericalangle = 90° \Rightarrow T_APT_B\sphericalangle = 180° - \gamma$; $APBC$ húrnégyszög, ezért $APB\sphericalangle = 180° -$ $- \gamma \Rightarrow \underline{T_BPA\sphericalangle = T_APB\sphericalangle}$. $AT_BP\sphericalangle = PT_CA\sphericalangle = 90° \Rightarrow AT_BPT_C$ húrnégyszög $\Rightarrow T_BPA\sphericalangle = T_BT_CA\sphericalangle$. T_C és T_A rajta van PB Thalész körén $\Rightarrow \underline{T_AT_CB\sphericalangle = T_APB\sphericalangle}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $AT_CT_B\sphericalangle = T_AT_CB\sphericalangle \Rightarrow T_B; T_C; T_A$ egy egyenesen van.

999. **1. eset:** $ABC\triangle$ hegyesszögű. Legyen M_C az M tükörképe AB-re. $BAM_C\sphericalangle = MAB\sphericalangle =$ $= 90° - \beta$ és $ABM_C\sphericalangle = MBA\sphericalangle = 90° - \alpha \Rightarrow AM_CB\sphericalangle = 180° - (90° - \beta) - (90° - \alpha) = 180° - \gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow A; B; C; M_C$ egy körön vannak.

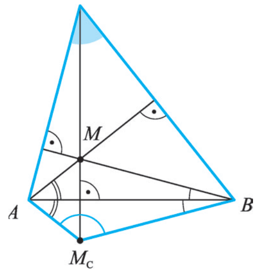
997.



998.

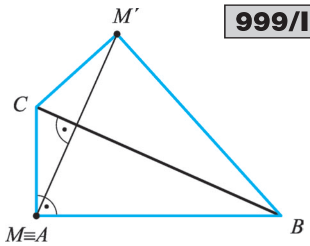


999/I.

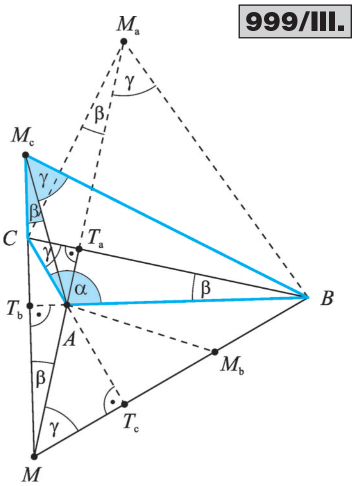


I

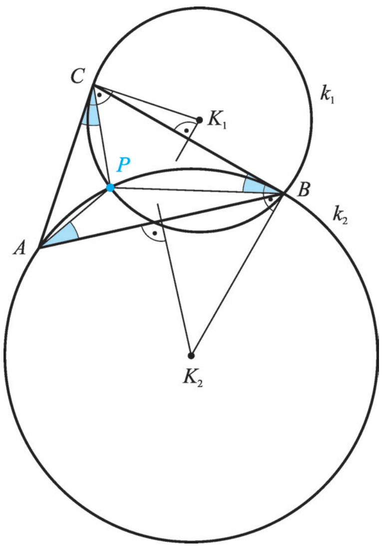
999/II.



999/III.



1003.



2. eset: $ABC\triangle$ derékszögű. M tükörképe AB-re is, AC-re is A. M' az M tükörképe CB-re $\Rightarrow CM'B\sphericalangle = 90° \Rightarrow A$; B; M'; C egy körön vannak (BC Thalész körén).

3. eset: $ABC\triangle$ tompaszögű. $\beta = CBA\sphericalangle = CMA\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek, valamint $\gamma = BCA\sphericalangle = BMA\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek $\Rightarrow$ a tükrözés miatt $CM_aT_a\sphericalangle = \beta$ és $BM_aT_a\sphericalangle = \gamma \Rightarrow CM_aB\sphericalangle = \beta + \gamma \Rightarrow CM_aB\sphericalangle + CAB\sphericalangle = \beta + \gamma + \alpha = 180° \Rightarrow A$; C; B; M_a egy körön van. Tükrözés miatt $AM_bM\sphericalangle = AMT_c\sphericalangle = \gamma \Rightarrow AM_bB\sphericalangle = 180° - \gamma \Rightarrow AM_bB\sphericalangle + ACB\sphericalangle = 180° \Rightarrow A$; M_b; B; C egy körön van. Tükrözés miatt $CM_cA\sphericalangle = \beta$ és $AM_cB\sphericalangle = \gamma \Rightarrow CM_cB\sphericalangle = \beta + \gamma \Rightarrow CM_cB\sphericalangle + CAB\sphericalangle = \beta + \gamma + \alpha = 180° \Rightarrow A$; B; C; M_c egy körön vannak.

1000. M tükörképe az AB oldalegyenesre M_C. A 999. feladatból tudjuk, hogy a magasságpont tükörképe rajta van a háromszög köré írható körön. Így AB az M_C-ből vagy ugyanakkora szögben látszik, mint C-ből, azaz γ szög alatt, vagy $(180° - \gamma)$ szög alatt.

1001. M-et tükrözzük BC felezőpontjára: M'. $\Rightarrow CMB\sphericalangle = CM'B\sphericalangle$. M-et tükrözzük BC egyenesre: M_a. $\Rightarrow CMB\sphericalangle = CM_aB\sphericalangle$. A fentiekből következik: $CM'B\sphericalangle = CM_aB\sphericalangle \Rightarrow M'$ és M_a rajta van BC ugyanazon látószögkörívén. Mivel M' és M_a a BC azonos oldalán vannak, a látószögkörív azonos ívén helyezkednek el. A 999. feladatból tudjuk, hogy M_a rajta van az $ABC\triangle$ köré írható körön, ezért ennek része a kérdéses látószögkörív, vagyis M' rajta van a háromszög köré írt körön.

1002. M tükörképe AC egyenesre M_b. A tükrözés miatt az $ACM\triangle$ köré írható kör sugara egyenlő az $ACM_b\triangle$ köré írható kör sugarával. Az $ACM_b\triangle$ köré írható kör a 999. feladat miatt megegyezik az $ABC\triangle$ köré írható körrel. Hasonlóan belátható, hogy $ABM\triangle$ és $BCM\triangle$ köré írható kör sugara is egyenlő az $ABC\triangle$ köré írható kör sugarával.

1003. Felhasználjuk: $PCA\sphericalangle = CBP\sphericalangle$, mert kerületi szögek k_1-ben, valamint $CBP\sphericalangle = BAP\sphericalangle$, mert kerületi szögek k_2-ben. A szerkesztés: ① AC-t C-ben érintő, B-n áthaladó kör: k_1. ② BC-t B-ben érintő, A-n áthaladó kör: k_2. ③ $k_1 \cap k_2 = P$.

1004. $d = 4$ cm.

1005. A deltoid tengelyesen szimmetrikus, ezért két-két szomszédos oldala egyenlő. $\Rightarrow$ A szemközti oldalak összege megegyezik. $\Rightarrow$ A konvex deltoid érintőnégyszög.

1006. A paralelogramma konvex. A paralelogramma érintőnégyszög, ha $a + a = b + b$, azaz $a = b$. $\Rightarrow$ A paralelogramma érintőnégyszög, ha rombusz.

1007. Legyenek az érintőhatszög csúcsai A, B, C, D, E és F, az érintési pontok pedig K, L, M, N, P és Q. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. $\Rightarrow AK = AQ$; $FQ = FP$; $EP = EN$; $ND = DM$; $MC = CL$; $LB = BK \Rightarrow AB + CD + EF = AK + KB + CM + MD + EP + PF = AQ + BL + LC + DN + NE + FQ = BC + DE + FA$.